COURS

DE

MÉCANIQUE ET MACHINES

PROFESSÉ

A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

PAR M. EDM. BOUR,

INGÉNIEUR DES MINES.

Publié par M. PHILLIPS, Professeur de Mécanique à l'École Polytechnique, avec la collaboration de MM. COLLIGNON et KRETZ.

IIIe ET DERNIER FASCICULE.

DYNAMIQUE ET HYDRAULIQUE,

AVEC 125 FIGURES DANS LE TEXTE.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1874

COURS

DE

MÉCANIQUE ET MACHINES.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,
Quai des Augustins, 55.

COURS

DE

MÉCANIQUE ET MACHINES

PROFESSÉ

A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

PAR M. EDM. BOUR,

INGÉNIEUR DES MINES.

Publié par M. PHILLIPS, Professeur de Mécanique à l'École Polytechnique, avec la collaboration de MM. COLLIGNON et KRETZ.

IIIe ET DERNIER FASCICULE.

DYNAMIQUE ET HYDRAULIQUE,

AVEC 125 FIGURES DANS LE TEXTE.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1874

TABLE DES MATIÈRES.

AVERTISSEMENT.

Ce troisième fascicule du *Cours de Mécanique et Machines*, de Bour, est le dernier que nous ferons paraître. Il est conforme à la rédaction laissée par ce savant.

Quant à la dernière partie du Cours, *Moteurs et Récepteurs*, que Bour professait à l'École Polytechnique, les Éditeurs ont dû renoncer à la publier, l'Auteur n'ayant laissé que des Notes succinctes qui ne pouvaient, sous leur forme sommaire, être livrées à l'impression.

G.-V.

COURS

DE

MÉCANIQUE ET MACHINES

PROFESSÉ

A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

DYNAMIQUE ET HYDRAULIQUE.

Ce volume comprend deux Sections :

La première a pour objet la *Dynamique*, ou science des forces et des mouvements qu'elles produisent;

La seconde contient, sous le titre général *Hydraulique*, la *Mécanique spéciale des fluides*, avec ses divisions principales :

L'*Hydrostatique* et l'*Hydrodynamique*, sciences de l'équilibre et du mouvement des liquides et des gaz;

Et l'*Hydraulique* proprement dite, application de ces sciences à l'industrie et à l'art de l'ingénieur.

PREMIÈRE SECTION.

DYNAMIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL.

§ I. — Équations différentielles du mouvement.

« La Dynamique est la science des forces accélératrices et retardatrices, et des mouvements variés qu'elles doivent produire. Cette science est due entièrement aux modernes, et Galilée est celui qui en a jeté les premiers fondements. Avant lui, on n'avait considéré les forces que dans l'état d'équilibre, et quoiqu'on ne pût attribuer l'accélération des corps pesants et le mouvement curviligne des projectiles qu'à l'action constante de la gravité, personne n'avait encore réussi à déterminer les lois de ces phénomènes journaliers, d'après une cause si simple. Galilée a fait, le premier, ce pas important, et a ouvert par là une carrière nouvelle et immense à l'avancement de la Mécanique (*). Cette découverte ne procura pas à Galilée, de son vivant, autant de célébrité que celles qu'il avait faites dans le ciel, mais elle fait aujourd'hui la partie la plus solide de la gloire de ce grand homme.

» Huygens, qui paraît avoir été destiné à perfectionner et à compléter la plupart des découvertes de Galilée, ajouta à la théorie de l'accélération des graves celle du mouvement des

(*) *Discorsi e demostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, 1638.

pendules et des forces centrifuges (*), et prépara ainsi la route à la grande découverte de la gravitation universelle. La Mécanique devint une science nouvelle entre les mains de Newton, et ses *Principes mathématiques*, qui parurent pour la première fois en 1687, furent l'époque de cette révolution.

» Enfin, l'invention du calcul infinitésimal mit les géomètres en état de réduire à des équations analytiques les lois du mouvement des corps (**). » Mais, si la Mécanique reçut ainsi de la science du Calcul un secours considérable et une impulsion inattendue, on peut dire que, réciproquement, l'Analyse doit ses découvertes les plus originales aux efforts consacrés à la solution des problèmes de Mécanique.

C'est au moyen du principe de la composition des mouvements produits par les forces que Galilée a résolu les premières questions qui se rapportent à la Dynamique.

Dans le premier Chapitre de la *Statique*, nous avons donné un aperçu des nombreux corollaires du principe de Galilée, de cette grande loi qui explique et complète la loi primordiale de l'inertie de la matière (***). Ce principe nous a servi de point de départ dans notre exposition de la Statique, bien qu'il fût peut-être plus naturel, et surtout plus conforme à l'ordre historique, de suivre une marche toute différente. Nous allons actuellement développer la manière dont notre principe fournit la solution du problème général de la *Dynamique du point matériel.*

Il nous suffira pour cela de rappeler quelques-uns des résultats précédemment établis, résultats auxquels nous n'avons rien à ajouter de nouveau.

I. *Quelles que soient les conditions dans lesquelles un point matériel se trouve placé, on peut toujours considérer ce point*

(*) *Horologium oscillatorium*, 1673.

(**) LAGRANGE, *Mécanique analytique*, 3e édition, t. I, p. 207.

(***) La matière est *inerte*, c'est-à-dire indifférente à toute cause de mouvement, à toute *force*. Quand plusieurs forces agissent simultanément sur un même *point matériel*, celui-ci cède à la fois, et sans élection aucune, à toutes ces forces, sans qu'aucune d'elles gêne en rien le mouvement que les autres tendent à produire. Les êtres animés présentent des phénomènes d'un ordre tout à fait opposé.

comme soumis à l'action d'une force unique, laquelle est la résultante des efforts de toute espèce qui s'exercent sur lui.

Remarque. — Si notre point n'est pas absolument libre, c'est-à-dire s'il fait partie d'un *corps*, ou d'un système de corps liés entre eux, ou bien encore s'il se trouve gêné dans son mouvement par des obstacles, il faudra avoir soin, dans l'évaluation de la résultante ou force motrice, de tenir compte des forces qui proviennent des liaisons du système, ainsi que des réactions des obstacles ou appuis.

Ces forces particulières, qui agissent au même titre que toutes les autres forces pour déterminer les diverses circonstances du mouvement du point mobile, ne sont pas immédiatement connues : elles dépendent du mouvement inconnu, lequel en dépend à son tour. On est donc obligé de les introduire dans les constructions et les calculs comme des inconnues, dont on calcule plus tard les valeurs par l'une des méthodes que nous exposerons en temps utile.

II. *Quand un point matériel animé d'une vitesse quelconque, résultat d'efforts antérieurs à l'instant considéré, est actuellement soumis à l'action d'une force, l'accélération totale du mouvement de ce point a pour direction la direction de la force, et pour valeur le quotient de la force motrice par la masse du point matériel en mouvement.*

C'est ce que nous avons exprimé par l'équation

$$J = \frac{F}{m},$$

dans laquelle J est exprimé en mètres, et F en kilogrammes; quant à la masse m, elle ne peut être rapportée à une unité particulière. C'est le quotient $\frac{P}{g}$ du poids en kilogrammes par le nombre 9,8088 qui mesure dans notre système d'unités l'accélération due à la pesanteur. Si l'on remplace m par sa valeur $\frac{P}{g}$, on a

$$J = \frac{F}{P} g,$$

équation qui est homogène et ne dépend plus des unités qu'on voudra adopter.

III. *L'accélération de la projection d'un point sur un axe fixe est la projection sur le même axe de l'accélération totale du point.*

On a, en supposant les projections orthogonales,

$$J_x = J\cos\overline{J, x} = \frac{F}{m}\cos\overline{F, x},$$

parce que la direction de l'accélération totale est la même que celle de la force.

On aurait trouvé la même valeur pour J_x, en considérant, par une double abstraction, la projection géométrique du point mobile comme un point matériel de masse m, soumis à l'action d'une force

$$F\cos\overline{F, x},$$

projection de la force F sur l'axe des x.

Ce résultat constitue un théorème dont l'importance est égale à la simplicité, c'est le véritable et unique principe de la Dynamique, dit Euler dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin* pour l'année 1750.

Voici l'énoncé de ce théorème, qui permet d'écrire immédiatement les équations différentielles du mouvement d'un point matériel libre, soumis à l'action de forces données quelconques :

Théorème fondamental. — *La projection d'un point matériel sur un axe fixe se meut comme un point matériel de même masse que le point donné, animé d'une vitesse égale à la projection de la vitesse de ce point, et sollicité par la projection de la force motrice effective.*

Ce théorème est vrai, de quelque manière que s'effectue la projection du mouvement sur la droite fixe (*).

Projection du mouvement sur la tangente et sur la normale. — L'application du théorème fondamental suppose les

(*) La projection, rectangulaire ou oblique, du mouvement sur un plan fixe donne lieu à un théorème analogue.



axes de projection fixes. Aussi, quand on parle de projeter le mouvement d'un point sur la tangente et la normale principale de sa trajectoire, faut-il comprendre qu'il s'agit, non pas de lignes assujetties à coïncider constamment avec la tangente et la normale à la courbe décrite, mais bien d'une tangente fixe, d'une normale fixe, sur lesquelles on étudie les projections des positions du mobile infiniment voisines du point de contact.

Observons qu'on se fait une idée parfaitement claire du mouvement rectiligne produit par une force dont la direction ne diffère pas de celle de la vitesse actuelle du mobile. Il est, en effet, évident que, dans ce cas, la force qui sollicite le mobile ne peut avoir pour effet que d'en augmenter ou d'en diminuer la vitesse. Au contraire, on voit beaucoup moins bien comment, dans le mouvement curviligne, la force influe à la fois sur les éléments géométriques de la trajectoire du mobile et sur les variations de la vitesse de ce mobile.

Pour arriver à se faire une idée parfaitement nette de ce double mode d'action, il faut se transporter dans le voisinage de l'arc décrit par le mobile pendant un temps infiniment petit, et projeter cet arc sur la tangente à l'une de ses extrémités, sur la normale principale au même point, enfin sur la perpendiculaire au plan osculateur.

On sait que, relativement aux axes ainsi définis, les trois composantes de l'accélération totale se réduisent à deux, qui sont :

1° L'*accélération tangentielle*, $\frac{dv}{dt}$, dirigée suivant la tangente à la trajectoire, dans le sens du mouvement ou en sens inverse, suivant le signe de $\frac{dv}{dt}$;

2° L'*accélération centripète*, dirigée vers le centre de courbure et égale à $\frac{v^2}{\rho}$.

Cela posé, les forces étant proportionnelles aux accélérations, nous pouvons de même décomposer la force qui agit sur le point en deux autres :

1° La *force tangentielle*, égale à

$$F\cos\overline{F, ds} = m\frac{dv}{dt};$$

2° La *force centripète*, égale à

$$F \cos \overline{F, \rho} = m \frac{v^2}{\rho}.$$

Ces formules mettent bien nettement en évidence la manière dont une force, agissant sur un mobile donné, produit à la fois et d'une manière indépendante la variation de vitesse du mobile et la courbure de sa trajectoire. Ainsi :

1° Le changement de grandeur que la vitesse du mobile éprouve avec le temps est uniquement dû à la force tangentielle; en sorte que, si cette force tangentielle était constamment nulle, c'est-à-dire si la force F était toujours normale à la trajectoire, la vitesse ne varierait pas et le mouvement serait uniforme.

2° De même, la courbure $\frac{1}{\rho}$ dépend uniquement de la force centripète. Si cette force était constamment nulle, la courbure de la trajectoire le serait aussi et le mouvement serait rectiligne.

On s'est servi très-longtemps de ces formules relatives aux forces tangentielles et centripètes pour résoudre les problèmes de mouvement. C'est ainsi que procédait Newton, en employant exclusivement les considérations géométriques; car, s'il s'est servi quelquefois du calcul analytique, c'est uniquement la méthode des séries qu'il a employée, méthode qui doit être distinguée de la méthode différentielle, quoiqu'il soit facile de les rapprocher et de les rapporter à un même principe.

Le traité de Mécanique d'Euler, qui a paru en 1736 et qu'on doit regarder comme le premier grand ouvrage où l'Analyse ait été appliquée à la science du mouvement, est encore tout fondé sur ces formules; mais on les a presque abandonnées depuis, parce qu'on a trouvé une manière plus simple d'exprimer l'effet des forces accélératrices sur le mouvement des corps.

Elle consiste à rapporter le mouvement du corps et les forces qui le sollicitent à des directions fixes dans l'espace. Alors, en employant, pour déterminer le lieu des corps dans

l'espace, trois coordonnées rectangulaires qui aient ces mêmes directions, la variation de ces coordonnées représente évidemment l'espace parcouru par le point dans la direction de chacun des axes fixes.

Mouvement d'un point matériel libre.

En adoptant ce système, il faut également décomposer la force donnée en trois autres, X, Y, Z, parallèles respectivement aux trois axes coordonnés. D'après notre théorème fondamental, chacune de ces composantes détermine, d'une manière indépendante, toutes les circonstances du mouvement rectiligne de la projection correspondante. On obtient ainsi trois équations différentielles (*) :

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X,\\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y,\\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z,\end{aligned}\right.$$

qui déterminent en fonction du temps les trois coordonnées inconnues x, y, z.

Les quantités X, Y, Z étant des fonctions connues des coordonnées x, y, z, du temps t, et quelquefois même des vitesses $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, les équations (1) sont trois équations simultanées du deuxième ordre, dont l'intégration est du domaine de l'Analyse pure.

Rappelons seulement que les intégrales des équations (1), c'est-à dire les équations finies du mouvement, doivent con-

(*) Cette manière d'établir les équations différentielles du mouvement d'un corps soumis à l'action de forces quelconques, en le réduisant à des mouvements rectilignes, est, par sa simplicité, préférable à toutes les autres; elle aurait dû se présenter d'abord, mais il paraît que Maclaurin est le premier qui l'ait employée dans son *Traité des fluxions*, qui a paru, en anglais, en 1742 : elle est maintenant universellement adoptée.

tenir six constantes arbitraires distinctes. Le problème est pourtant bien déterminé (*); et la présence des arbitraires tient à ce que nous n'avons pas tenu compte, en écrivant les équations différentielles, des conditions dans lesquelles le point matériel se trouve placé, au moment où nous l'abandonnons à l'action des forces X, Y, Z. L'Algèbre nous avertit ainsi que notre méthode nous donne, du même coup, la solution de tous les problèmes qui diffèrent du problème proposé par la position initiale du point mobile, ainsi que par la grandeur et la direction de la vitesse qui anime ce point, à l'instant pris pour origine du temps.

L'intégration générale des équations (1) constitue donc seulement la première partie de la solution de la question proposée, et l'on doit achever cette solution de la manière suivante.

Soient

$$(2)\qquad \begin{cases} x = \varphi_1(t, \alpha, \beta, \ldots), \\ y = \varphi_2(t, \alpha, \beta, \ldots), \\ z = \varphi_3(t, \alpha, \beta, \ldots) \end{cases}$$

les intégrales générales trouvées; différentions ces équations par rapport au temps: pour avoir les composantes de la vitesse mobile, il vient

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{d}{dt}\varphi_1(t, \alpha, \beta, \ldots), \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{d}{dt}\varphi_2(t, \alpha, \beta, \ldots), \\ \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{d}{dt}\varphi_3(t, \alpha, \beta, \ldots). \end{cases}$$

Cela posé, ainsi que nous l'avons dit, pour que le problème soit complétement défini, il faut qu'on nous dise, à l'instant

---

(*) Il est de l'essence des problèmes de Mécanique de n'admettre jamais qu'une seule solution. A une question du domaine de la Géométrie, on peut souvent répondre de deux manières également admissibles. C'est ce qui n'a jamais lieu en Mécanique : un corps étant placé dans des conditions données, le mouvement qu'il va prendre est unique et bien déterminé.



où nous commençons à étudier le mouvement, où se trouve placé le point mobile, ainsi que la vitesse dont il est animé. On connaît ainsi, pour $t = o$, la valeur des coordonnées x_o, y_o, z_o, et des composantes des vitesses $\left(\frac{dx}{dt}\right)_o$, $\left(\frac{dy}{dt}\right)_o$, $\left(\frac{dz}{dt}\right)_o$. En mettant ces valeurs dans les équations (2) et (3), nous aurons six équations qui serviront à déterminer les arbitraires.

Les six constantes devant essentiellement être distinctes, les équations qui doivent en donner les valeurs ne sauraient être ni incompatibles ni indéterminées. Si l'un de ces cas se présentait, c'est qu'on n'aurait pas les intégrales générales des équations différentielles (1).

Mouvement dans un plan. — Lorsque la force qui sollicite un point matériel se trouve constamment contenue dans un plan, lequel renferme aussi la vitesse initiale, le mobile ne sort pas de ce plan. Si l'on fait choix de deux axes coordonnés, situés dans ce même plan, Ox, Oy, les équations différentielles du mouvement se trouvent réduites à deux :

$$(4)\qquad \left\{ \begin{array}{l} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = X, \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = Y, \end{array} \right.$$

et leurs intégrales générales contiennent quatre constantes arbitraires.

Réciproque du problème de la Dynamique.

Quand on connaît la loi du mouvement d'un point, on connaît les expressions de ses trois coordonnées en fonction du temps, dans un système d'axes rectangulaires ou obliques quelconques. Alors les dérivées secondes des trois coordonnées, par rapport au temps, multipliées par la masse du mobile, donnent les expressions des composantes de la force motrice, dans le système de projection adopté.

Application au mouvement des corps pesants à la surface de la terre.

Considérons un corps soumis à la seule action de la pesanteur, que nous regarderons comme une force d'intensité con-

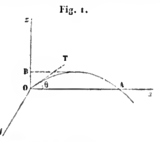


Fig. 1.

stante $P = mg$, parallèle à l'axe des z (*fig.* 1). Les équations différentielles du mouvement sont

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= 0,\\ \frac{d^2y}{dt^2} &= 0,\\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -g; \end{aligned}\right.$$

et les intégrales générales :

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \alpha t + \beta,\\ y &= \gamma t + \delta,\\ z &= \varepsilon t + \zeta - \tfrac{1}{2}gt^2. \end{aligned}\right.$$

Prenons pour origine le point de départ, les trois constantes β, δ, ζ sont nulles. Choisissons le plan des zx de manière qu'il renferme la vitesse initiale OT. Enfin, soit v_0 cette vitesse initiale, et θ l'angle qu'elle fait avec le plan horizontal.

On a pour les trois projections de cette vitesse

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} v_{0,x} &= \alpha = v_0\cos\theta,\\ v_{0,y} &= \gamma = 0,\\ v_{0,z} &= \varepsilon = v_0\sin\theta; \end{aligned}\right.$$

d'où

$$(8)\qquad \begin{cases} x = v_0 \cos\theta . t, \\ z = v_0 \sin\theta . t - \frac{1}{2} g t^2. \end{cases}$$

Amplitude du jet :

$$z = 0, \quad x = OA = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}.$$

Hauteur de l'ascension :

$$v_z = 0, \quad z = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}.$$

§ II. — Mouvement d'un point matériel qui n'est pas libre.

Nous avons montré par un grand nombre d'exemples, dans les applications de la Cinématique, comment, par des combinaisons qui ne sont que de la Géométrie pure, on fait en sorte que les mouvements de certaines pièces de mécanisme satisfassent nécessairement à des conditions imposées.

Ces combinaisons sont absolument indépendantes des forces qui peuvent agir sur le système ainsi constitué, pourvu, bien entendu, que ces forces ne soient pas assez grandes pour briser les liens du système.

Un wagon, monté sur des roues coniques et placé sur une voie de fer, se mouvra toujours le long de cette voie, dans un sens ou dans l'autre, quelles que soient les grandeurs et les directions des forces qu'on lui appliquera, pourvu qu'on ne dépasse pas certaines limites; une balle de plomb, suspendue à l'extrémité d'un fil inextensible dont l'autre extrémité est fixe, se mouvra toujours de telle manière que son centre de figure reste sur la surface d'une sphère ayant le point d'attache du fil pour centre, quelles que soient les forces qui agiront sur elle, pourvu que ces forces ne tendent pas à la rapprocher de ce point d'attache du fil. Dans le premier de ces deux exemples, le mouvement du wagon est produit à la fois par les forces qui lui sont directement appliquées dans les différentes directions, et par les réactions qu'il éprouve de la part des rails dans les divers points, où il les touche; si l'on réduit le wagon, par la pensée, à un simple point matériel sur lequel

agiraient ces diverses forces, on trouvera son mouvement en appliquant les théories exposées dans le paragraphe précédent : seulement, il arrivera que, quelles que soient les forces directement appliquées à ce point matériel, c'est-à-dire autres que les réactions des rails, la trajectoire qu'il décrira sera toujours la même, parce que ces réactions prendront à chaque instant des grandeurs et des directions telles qu'il en soit ainsi. Dans le second exemple, la balle de plomb se meut sous les actions simultanées des forces qui lui sont directement appliquées et de la réaction qu'elle éprouve de la part du fil ; cette balle, supposée réduite à un point matériel sur lequel agiraient toutes les forces que nous venons d'indiquer, se mouvra conformément à la théorie générale ; mais il arrivera que, quelle que soit la résultante des forces directement appliquées à la balle, c'est-à-dire autres que la réaction qu'elle éprouve de la part du fil, cette réaction prendra toujours une intensité telle que la balle ne quitte pas la surface sphérique dont nous avons parlé.

Pour préciser ces notions, nous dirons, comme nous l'avons fait en Statique, qu'un point matériel qui n'est pas libre est un point dont les coordonnées ne peuvent pas prendre toutes les valeurs imaginables. Si, par exemple, on se donne les coordonnées x et y du point à un certain instant, la troisième coordonnée, z, n'est point tout à fait arbitraire : elle a une ou plusieurs valeurs qui sont déterminées quand on connaît celles de x et y; c'est ce qu'on exprime en disant que z est une fonction de x et de y, ou en écrivant qu'il existe entre les trois variables x, y, z une équation de la forme

$$(1) \qquad F(x, y, z) = 0.$$

Mouvement sur une surface fixe donnée.

L'équation (1) veut dire que le point dont les coordonnées sont x, y, z ne peut pas sortir, dans son mouvement, d'une certaine surface représentée par cette équation. Quelles que soient les combinaisons mécaniques employées pour obtenir ce résultat, nous supposerons, pour plus de simplicité, que la surface constitue un obstacle matériel sur lequel notre mobile

se trouve appuyé. Nous continuerons d'appeler *réaction de la surface* la force, dirigée suivant la normale, capable de tenir lieu de la présence de la surface.

Soient X, Y, Z les composantes de la force qui agit directement sur le point mobile, abstraction faite de l'action de la surface. D'après ce que nous avons vu, nous pouvons regarder le point comme libre, à la condition d'adjoindre à la force donnée cette réaction inconnue N. Les équations différentielles du mouvement prendront alors la forme suivante :

$$(2)\qquad \begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = X + N\cos\overline{N,x}, \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = Y + N\cos\overline{N,y}, \\ m\dfrac{d^2z}{dt^2} = Z + N\cos\overline{N,z}, \end{cases}$$

les trois cosinus qui entrent dans ces équations étant donnés en fonction de x, y, z par l'équation de la surface, puisque la direction de la réaction N est celle de la normale extérieure à cette surface (nous négligeons le frottement). En éliminant N entre ces équations, on aura deux équations qui, jointes à l'équation (1), permettront de déterminer x, y et z en fonction de t. Ensuite, au moyen de l'une quelconque des équations (2), on trouvera la valeur de la réaction N.

Assez souvent on profite de l'équation de la surface pour exprimer les trois coordonnées du point mobile en fonction de deux variables indépendantes.

Ainsi l'on pose

$$(3)\qquad \begin{cases} x = \varphi_1(u, v), \\ y = \varphi_2(u, v), \\ z = \varphi_3(u, v); \end{cases}$$

et il est clair que ces trois équations peuvent représenter une surface quelconque, puisque les fonctions φ_1, φ_2, φ_3 sont complétement arbitraires.

Exprimons les dérivées secondes de x et de y par rapport à t en fonction des dérivées de u et de v par rapport à la

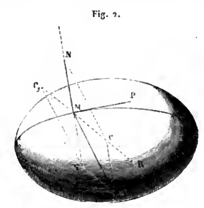
même variable : en remplaçant, dans les équations (2), $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ par leurs valeurs, on aura trois équations qui, réduites à deux par l'élimination de N, donnent les équations du mouvement en fonction de u et de v. Lagrange a fait connaître un procédé général qui permet d'écrire immédiatement les équations différentielles auxquelles doivent satisfaire u et v.

Nous verrons comment, au moyen de certains théorèmes généraux qui feront l'objet du paragraphe suivant, on peut résoudre, d'une manière à la fois simple et directe, la plupart des questions qui offrent un intérêt pratique.

Le mouvement du point étant connu, on trouve très-facilement la pression qui s'exerce sur la surface directrice : soit analytiquement, au moyen d'une des relations (2); soit géométriquement, en introduisant la considération de la force centripète et de la force tangentielle.

Soient M la position du mobile sur sa trajectoire (*fig.* 2), MN

Fig. 2.



la normale à la surface, sur laquelle nous portons une longueur représentant la réaction inconnue N qu'on veut déterminer.

Décomposons la force qui agit sur le point M en deux : l'une P, tangente à la trajectoire; l'autre Q, située dans le plan normal à cette trajectoire. Le mobile peut être regardé comme libre sous l'action des trois forces N, P, Q. Or, dans le mou-

vement d'un point libre, la force tangentielle est due à la projection rectangulaire sur la tangente des forces qui agissent sur le point, c'est-à-dire à la force P, puisque N et Q sont normales à cette tangente. On a donc, en premier lieu,

$$P = m\frac{dv}{dt}.$$

De plus, en composant les forces N et Q, on doit obtenir la force centripète MC (*). On pourra donc inversement, quand on connaîtra MC, qui est égale à $\frac{mv^2}{\rho}$, trouver par la construction d'un parallélogramme la grandeur de la réaction N.

La force MN_1, égale et directement opposée à MN, est la *pression* exercée par le mobile sur la surface. C'est la résultante de la force MQ et d'une force MC_1, égale et opposée à la force centripète. Ce résultat s'énonce ainsi :

Théorème. — *La pression exercée par un corps mobile sur une surface fixe est la résultante de la force normale et de la force centrifuge.*

C'est la présence de cette force centrifuge qui distingue la réaction dynamique de la réaction statique.

Étudions spécialement le cas où aucune force n'agit sur le point. La construction géométrique précédente permet de voir tout de suite les principales propriétés du mouvement.

La force P étant nulle, on a

$$\frac{dv}{dt} = 0.$$

Donc :

1° *Le mouvement est uniforme.*

Dans le parallélogramme MQCN, MQ est nul; donc les

(*) On conclut de là que la normale principale MR est située dans le plan NMQ.

côtés MC et MN coïncident. Ainsi la normale principale de la trajectoire se confond avec la normale à la surface.

2° *La trajectoire est une ligne géodésique de la surface* (*).

Mouvement sur une courbe fixe.

Supposons maintenant qu'on assujettisse les coordonnées d'un point mobile à vérifier simultanément deux équations telles que

$$(4)\qquad \begin{cases} \varphi(x, y, z) = 0, \\ \psi(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Le point est ainsi astreint à rester sur la courbe que représente le système de ces deux équations; sa trajectoire est immédiatement connue, et il n'y a plus qu'à trouver la loi des espaces parcourus sur cette trajectoire.

Décomposons, comme précédemment, la force donnée tangentiellement et normalement à la trajectoire (*fig.* 3).

L'accélération tangentielle est uniquement due à la force P, puisque la réaction est normale à la trajectoire; donc

$$(5)\qquad \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{P}{m}.$$

L'intégration de cette équation fera connaître la loi du mouvement.

Cela posé, pour avoir la réaction MN, nous remarquerons, comme dans le cas précédent, que la résultante des forces N

(*) Les lignes géodésiques, définies par la condition d'avoir en chaque point leur plan osculateur normal à la surface sur laquelle on les suppose tracées, jouissent ainsi des trois propriétés suivantes :

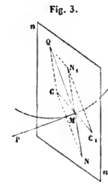
1° Propriété géométrique : la ligne géodésique est la plus courte qu'on puisse tracer entre deux points donnés sur la surface;

2° Propriété statique : c'est la forme d'équilibre que prend un cordon tendu sur la même surface;

3° Propriété dynamique : c'est le chemin que suit un mobile abandonné sur la surface à sa propre vitesse.

et Q doit donner la force centripète MC (*). Nous trouverons donc encore la pression MN_1 en composant MQ avec la force centrifuge MC_1,

Fig. 3.



Théorème. — *La pression exercée par un point forcé de se mouvoir sur une courbe fixe est la résultante de la force centrifuge et de la composante normale de la force qui agit sur le point.*

Mouvement d'un point pesant. — Comme exemple simple de ce genre de mouvement, considérons la fronde (*fig.* 4). Une pierre, attachée à l'extrémité d'une corde dont on tient l'autre bout à la main, tourne rapidement, de manière à décrire un cercle vertical, ayant pour centre la main supposée fixe.

Soit M la position la plus basse de la pierre. La tension de la corde dans la position OM serait égale à mg, poids du corps suspendu, si celui-ci était immobile. Mais, dans le cas du mouvement, il faut ajouter à ce poids, pour avoir la tension, la force centrifuge $\frac{mv^2}{\rho}$, dont la direction se confond avec celle

(*) Dans le cas actuel, la direction de MC est immédiatement connue, puisque la trajectoire est donnée. Quant à la réaction N_1, on sait seulement qu'elle est contenue dans le plan normal nn. Le contraire avait lieu dans le cas du mouvement d'un point sur une surface fixe.

du poids. La tension est donc égale à

$$m\left(\frac{v^2}{\rho}+g\right).$$

Dans la position opposée de la pierre, la tension est

$$m\left(\frac{v^2}{\rho}-g\right),$$

parce qu'alors le poids agit en sens inverse de la force centrifuge. Cette dernière valeur peut être positive ou négative,

Fig. 4.



selon que la vitesse v est plus ou moins grande. Si elle est positive, la corde reste tendue et la pierre décrit un cercle. Si, au contraire, elle est négative, la corde n'est plus tendue et la pierre retombe. Ce que nous disons pour ces positions particulières de la pierre s'applique évidemment à une position quelconque, en considérant toujours la composante du poids suivant le prolongement de la corde et l'ajoutant ou le retranchant suivant les cas. La tension sera d'ailleurs toujours comprise entre $m\left(\frac{v^2}{\rho}+g\right)$ et $m\left(\frac{v^2}{\rho}-g\right)$.

§ III. — Force d'inertie.

Considérons maintenant un corps obligé de suivre une trajectoire donnée avec des circonstances de mouvement complétement déterminées, par exemple un corps qu'on tient à la main et auquel on communique, sans le lâcher, un mouvement arbitraire.

La main, ou l'obstacle qui agit sur le corps, développe à chaque instant sur lui une certaine force; d'après la loi de Newton, le corps oppose une réaction égale et contraire : c'est cette réaction qu'on appelle la *force d'inertie*.

Pour trouver, à un instant donné, la valeur de cette réaction, nous nous rappellerons que la force qui agit sur le corps est dirigée suivant la même droite que l'accélération totale J du mouvement, et qu'elle est égale à mJ. Cette force représente précisément l'action du corps qui donne le mouvement obligatoire. Donc la force d'inertie est dirigée en sens inverse de l'accélération totale du mouvement, et elle a la même valeur mJ.

La définition précédente indique le véritable sens qu'on doit attacher à l'expression *force d'inertie*. Ce terme est d'ailleurs heureusement choisi, car la réaction à laquelle nous donnons ce nom est bien la force qu'un corps exerce sur nous, en vertu de son inertie, quand nous cherchons à le faire sortir des lois naturelles qui régissent la matière, c'est-à-dire quand nous le forçons à suivre une trajectoire courbe, ou bien que nous accélérons ou retardons son mouvement rectiligne.

Ce sont les réactions de ce genre qui constatent pour nous l'inertie de la matière en mouvement (c'est-à-dire sa tendance au mouvement rectiligne et uniforme), de même que l'effet exercé sur nos organes par un corps que nous empêchons de tomber nous donne la notion de la pesanteur de la matière.

En considérant les deux composantes de l'accélération totale suivant la tangente à la trajectoire et la normale principale, nous pouvons de même décomposer la force d'inertie en deux :

1° La *force d'inertie tangentielle*, $m\frac{dv}{dt}$, dirigée en sens

inverse du mouvement ou dans le même sens, selon que $\frac{dv}{dt}$ est positif ou négatif;

2° La *force d'inertie centrifuge*, ainsi nommée parce qu'elle est toujours dirigée en sens inverse de l'accélération centripète.

Si l'on décompose la force d'inertie suivant trois axes rectangulaires, les composantes (qui ont un signe) seront

$$-m\frac{d^2x}{dt^2}, \quad -m\frac{d^2y}{dt^2}, \quad -m\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Il peut arriver qu'un corps soit en mouvement sous l'action de deux ou plusieurs autres. Si l'on considère, par exemple, une bille retenue par deux tiges rigides, la bille réagit à la fois sur l'une et l'autre de ces tiges. La force d'inertie est la résultante fictive (*) de ces deux réactions.

Il est un point important auquel il faut faire attention à propos de la force d'inertie, parce que une fois ce point bien compris, on est en garde contre une foule d'erreurs qui ont été commises et se commettent tous les jours à ce sujet. La force d'inertie d'un point en mouvement émane du point matériel lui-même et s'exerce sur l'obstacle qui gêne son mouvement rectiligne et uniforme. Elle ne peut communiquer aucun mouvement au point matériel considéré (d'après la loi de l'inertie) et ne contribue en rien aux diverses modifications de son mouvement.

Quand on descend d'une voiture emportée rapidement, dès que les pieds se sont fixés au sol immobile, on sent le haut du corps porté en avant; on dit qu'on est poussé par la force d'inertie. C'est là une erreur grave : en effet, s'il faut une force pour donner du mouvement à un corps en repos, il n'est pas besoin de force pour obliger un corps à conserver un mouvement déjà acquis. Au contraire, il en faut une pour détruire ce mouvement, et si quelqu'un veut nous arrêter, dans l'exemple

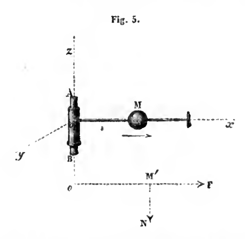
(*) Je dis la *résultante fictive* : en effet, deux forces appliquées en deux points différents ne peuvent pas avoir de résultante, si l'on entend par ce mot une force capable de remplacer deux ou plusieurs forces (chose que l'on sous-entend toujours plus ou moins sans s'en rendre compte); au contraire, ces forces, si leurs directions concourent en un certain point, ont une résultante dans le sens géométrique du mot.



cité, il est obligé d'exercer un certain effort; il reçoit alors un effort opposé: cet effort est la force d'inertie.

Dans les cours de Physique, pour mettre en évidence la force centrifuge, on fait une expérience qui consiste à faire tourner un fil de fer tendu horizontalement et traversant, à frottement doux, un trou percé dans une bille (*fig.* 5). Aussitôt qu'on met l'appareil en mouvement, la bille s'écarte rapidement du centre et va frapper fortement contre un arrêt placé

Fig. 5.



au bout de la tige : on dit qu'elle est lancée par la force centrifuge. Cette explication est fausse de tout point. La force centrifuge, dans cette expérience, n'a rien à démêler avec le mouvement de la bille; si celle-ci s'éloigne du centre, c'est sous la seule action de la pression exercée sur elle par le fil; c'est ce qu'il est facile de démontrer analytiquement, bien qu'il répugne au premier abord de voir un effort normal à la tige produire un mouvement de glissement le long de cette tige.

Au contraire, dès que la bille se trouve arrêtée par un obstacle qui la force à décrire un cercle d'un mouvement plus ou moins uniforme, dès qu'elle cesse de s'éloigner du centre, la force centrifuge apparaît et s'exerce contre l'obstacle qui s'oppose au mouvement naturel que la bille tendrait à prendre sous l'effort normal de la tige.

Dans le mouvement de la fronde, la force centrifuge s'exerce sur la corde et tend à la rompre; mais, une fois cet effet produit, le mobile, qui ne se trouve plus soumis à aucune force, *s'échappe par la tangente*, et continue son mouvement rectiligne et uniforme.

§ IV. — Théorèmes généraux relatifs au mouvement d'un point matériel.

Nous avons ramené les questions de mouvement à des problèmes de Calcul intégral et nous avons fait tout ce qu'on était en droit d'exiger de nous; mais les équations différentielles des problèmes de Mécanique, par cela même qu'elles ont une signification particulière, qu'elles sont de la Mécanique et non de la Géométrie et de la Physique, se distinguent de toutes les autres dans un grand nombre de cas (d'ailleurs les plus importants), et présentent des propriétés spéciales. Ces propriétés se formulent en un petit nombre de théorèmes généraux, au moyen desquels on peut écrire immédiatement certaines intégrales ou, du moins, être en mesure de trouver certaines relations rigoureuses ou approximatives.

Des intégrales. — Définissons d'abord ce que c'est qu'une *intégrale* d'un problème de Mécanique.

Nous avons mis la solution la plus générale des équations différentielles du mouvement d'un point sous la forme de six équations donnant les coordonnées et les vitesses en fonction du temps et de six arbitraires :

$$(1)\qquad \begin{cases} x = \varphi_1(t, \alpha, \beta, \ldots), \\ y = \varphi_2(t, \alpha, \beta, \ldots), \\ z = \varphi_3(t, \alpha, \beta, \ldots); \end{cases}$$

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{d}{dt}\varphi_1(t, \alpha, \beta, \ldots), \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{d}{dt}\varphi_2(t, \alpha, \beta, \ldots), \\ \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{d}{dt}\varphi_3(t, \alpha, \beta, \ldots). \end{cases}$$

Les six constantes arbitraires doivent être distinctes; cela veut dire qu'il est possible de résoudre les équations précédentes par rapport à α, β, γ,.... On met ainsi les équations finies du mouvement sous la forme de six nouvelles équations, telles que celles-ci :

$$(3)\quad \begin{cases} \alpha = \psi_1\left(t, x, y, z, \dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}, \dfrac{dz}{dt}\right), \\ \beta = \psi_2\left(t, x, y, z, \dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}, \dfrac{dz}{dt}\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Ces équations sont ce qu'on appelle proprement les *intégrales* du mouvement.

Une fois qu'on connaît un système de six intégrales distinctes, on est sûr que toute autre intégrale rentrerait dans celles-là; ce qui veut dire que si une fonction

$$\psi\left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \ldots\right)$$

reste constante en vertu des équations du mouvement, on peut la ramener à ne contenir que les six quantités α, β, γ,... ; et dès lors, une fois que l'on a écrit que toutes ces quantités α, β, γ,... restent constantes pendant le mouvement, on n'apprend rien en disant qu'une fonction de ces quantités reste également constante.

C'est en cherchant des *intégrales* qu'on procède ordinairement à l'intégration de la Dynamique. Alors même qu'on ne pourra arriver à la connaissance complète du mouvement, chaque intégrale qu'on trouvera nous apprendra, indépendamment des autres, une propriété de ce mouvement; il arrivera même souvent qu'une seule de ces intégrales offrira de l'intérêt au point de vue auquel on se trouvera placé; c'est ce qui justifie l'importance de la nouvelle forme sous laquelle nous mettons la solution d'un problème de Mécanique rationnelle.

Quand on veut rechercher des intégrales, le procédé qui se présente tout naturellement consiste à combiner les équa-

tions du mouvement jusqu'à ce qu'on obtienne une combinaison intégrable. Certaines de ces combinaisons réussissent souvent : ce sont celles qui ont une signification concrète, et auxquelles on est conduit tout naturellement par l'étude du mouvement en lui-même, indépendamment des équations différentielles. On arrive ainsi à un certain nombre de théorèmes généraux que nous allons établir directement au moyen des principes fondamentaux, marche bien préférable à celle qui consisterait à déduire ces vérités capitales des procédés du Calcul intégral et de transformations analytiques plus ou moins détournées.

Théorème des forces vives.

Nous avons vu que le demi-accroissement de la force vive d'un point est égal au travail élémentaire des forces qui agissent sur ce point. Donc

$$(4) \qquad d\left(\tfrac{1}{2}mv^2\right) = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz.$$

On retrouverait cette équation au moyen des équations différentielles

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X,$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y,$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z.$$

En effet, multiplions les premiers membres de ces équations respectivement par $\frac{dx}{dt}dt$, $\frac{dy}{dt}dt$, $\frac{dz}{dt}dt$, et les deuxièmes membres par dx, dy, dz; puis ajoutons membre à membre, nous aurons,

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{dt} + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{dz}{dt}\right)dt = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz,$$

ou

$$d\left(\tfrac{1}{2}mv^2\right) = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz.$$

Cette équation peut, toutes les fois qu'on le jugera conve-

nable, être substituée à l'une quelconque des équations du mouvement.

Nous pouvons l'écrire, en employant les signes d'intégration, sous la forme parfaitement équivalente

$$C = \tfrac{1}{2} mv^2 - \int (X dx + Y dy + Z dz)$$

ou

$$(5) \qquad \tfrac{1}{2} mv^2 - \tfrac{1}{2} mv_0^2 = \int_{t_0}^{t} (X dx + Y dy + Z dz).$$

Cette dernière équation donne lieu aux remarques suivantes:

1° L'intégrale écrite dans le second membre a toujours un sens bien défini. En effet, x, y, z sont des fonctions du temps t, qui existent nécessairement, puisque nous avons vu que, dans quelques conditions qu'un point matériel se trouve placé, le mouvement qu'il doit prendre est parfaitement déterminé. Donc dx, dy, dz sont aussi des fonctions de t multipliées par dt. On conçoit donc que l'intégrale puisse toujours être calculée une fois le problème résolu, et qu'on vérifie ainsi l'équation dite *des forces vives*. Il est clair d'ailleurs que cette équation ne saurait être, à ce point de vue, d'aucune utilité pour la connaissance des lois du mouvement.

2° Le second membre représente le travail total de la force F. Or on a vu que le travail total peut se calculer approximativement soit par les procédés généraux de quadratures, soit au moyen d'appareils spéciaux dans chaque cas. Cette opération étant supposée effectuée, notre équation permettra de trouver à chaque instant la valeur de v; elle fournira approximativement une intégrale, et pourra offrir de l'intérêt dans certaines questions de Mécanique appliquée.

3° Enfin, dans un grand nombre de cas très-importants, il est possible d'intégrer la fonction $X dx + Y dy + Z dz$ sans connaître les valeurs de x, y, z en fonction de t.

Par exemple, il est clair que l'expression $x dx + y dy + z dz$ est toujours la différentielle de $\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$, quelles que soient les valeurs de x, y et z, qui peuvent être des fonctions du temps ou de toute autre variable.

Intégrale des forces vives. — Supposons donc que les composantes X, Y, Z de la force motrice soient des fonctions

connues des coordonnées x, y, z du mobile, et que la quantité

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$$

soit la différentielle exacte d'une certaine fonction de ces coordonnées.

Si l'on a

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = d.f(x, y, z),$$

l'équation des forces vives prend la forme

$$(6)\qquad \tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2 = f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0).$$

Elle constitue alors une intégrale du mouvement, et nous dirons que, dans ce cas, *l'intégrale des forces vives existe*, l'équation des forces vives ayant toujours lieu sous la forme différentielle.

Surfaces de niveau. — On voit que, lorsque la fonction $f(x, y, z)$ reste invariable, la vitesse ne change pas non plus. Posons

$$f(x, y, z) = C.$$

Cette équation, dans laquelle C est une constante à laquelle on peut attribuer toutes les valeurs possibles, représente une famille de surfaces connues sous le nom de *surfaces de niveau*. On reconnaît aisément qu'en chaque point de l'espace il passe toujours une de ces surfaces, et une seule; et l'équation (6) montre que, toutes les fois que le mobile traversera l'une de ces surfaces, sa vitesse se retrouvera la même, puisque, pour tous les points d'une pareille surface, $f(x, y, z)$ a la même valeur. Ce résultat est indépendant du chemin que le mobile aura suivi pour arriver à la surface, et du nombre de fois qu'il l'aura traversée entre les deux époques considérées. Nous ne nous arrêterons pas à discuter les cas singuliers où les surfaces de niveau se coupent mutuellement; d'où il suit que les propriétés précédentes cessent en partie d'avoir lieu (*).

Ces surfaces jouissent d'une autre propriété: c'est que, dans chacune des positions qu'occupe successivement le point mo-

(*) Consulter un Mémoire de M. J. Bertrand, inséré dans le XXVIII[e] Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*.

bile, la force F, à laquelle il est soumis, est dirigée normalement à la surface de niveau qui passe en ce point. En effet, l'équation différentielle commune à toutes ces surfaces est

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0.$$

Or dx, dy, dz sont proportionnels aux cosinus des angles qu'un élément rectiligne quelconque tracé sur la surface à partir de ce point fait avec les trois axes coordonnés, et X, Y, Z sont proportionnels aux cosinus des angles que la force F fait avec ces mêmes axes. L'équation précédente exprime la perpendicularité de ces deux directions.

Il suit de là qu'on peut définir les surfaces de niveau par cette propriété, qu'un point matériel posé sur une pareille surface, sans en pouvoir sortir, y reste en équilibre sous l'action de la force donnée.

Remarque. — Si l'intégrale des forces vives s'applique à un problème de mouvement, elle s'appliquera encore si, pour changer le mouvement, on ne fait qu'obliger le mobile à rester sur une surface fixe ou sur une courbe fixe, sans rien changer aux forces dont les composantes ont été désignées par X, Y, Z. Car alors on introduit bien une nouvelle force, la réaction de la courbe ou la surface; mais, comme cette réaction est normale, elle ne produit pas de travail et n'altère pas la différentielle $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$. Par exemple, dans le mouvement d'un corps pesant assujetti à se mouvoir sur une surface quelconque, il y a une intégrale qui ne dépend pas de la nature de la surface : c'est celle des forces vives, qui garde la même forme, quelle que soit la courbe ou la surface directrice.

Cas dans lesquels l'intégrale des forces vives existe. — Cherchons maintenant quelles sont les conditions nécessaires pour que l'intégrale des forces vives existe.

1° Il faut d'abord que les composantes de la force ne contiennent pas d'autres quantités variables avec t que x, y et z. En effet, si ces quantités renfermaient une autre variable, celle-ci se retrouverait dans l'intégrale, et l'on aurait, pour la différentielle totale de f

$$df = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz + \frac{df}{dt}\,dt;$$

les trois premiers termes ne formeraient donc pas la différentielle complète de cette fonction.

2° Si l'on tient compte du frottement, l'intégrale des forces vives ne subsistera pas. En effet, le frottement est dirigé en sens inverse de la vitesse, et par suite ses composantes dépendent des composantes $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ de la vitesse, et non pas uniquement de x, y, z.

3° Il en de même si le mobile se trouve dans un milieu dont la résistance doive entrer en ligne de compte, parce que l'expérience prouve que cette résistance dépend aussi de la vitesse du mobile.

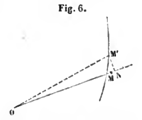
Nous allons citer les cas les plus importants dans lesquels l'intégrale des forces vives existe :

1° Quand la force qui agit sur le mobile est constamment dirigée vers un point fixe O, et que sa grandeur dépend uniquement de la distance r du mobile à ce point fixe, en sorte qu'on a

$$F = f(r).$$

En effet, le travail élémentaire de la force F, pendant que le

Fig. 6.



mobile va de M en M' (*fig.* 6), est égal à F × MN, ou, ce qui est la même chose,

$$f(r)\,dr,$$

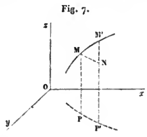
expression qui est une différentielle exacte.

Mais si le centre d'attraction est mobile, l'intégrale n'existera plus, parce que le travail dépendra des coordonnées de ce centre, dont la position varie avec le temps.

2° L'intégrale des forces vives existe encore si la force est dirigée perpendiculairement à un plan fixe xoy et que sa gran-

deur $f(z)$ ne dépende que de la distance z du mobile à ce plan (*fig.* 7).

Fig. 7.



Car alors le travail élémentaire de la force, en appelant z la distance du mobile au plan, est égale à $f(z)\,dz$, expression évidemment intégrable.

Ce dernier cas est celui qui se rencontre dans le mouvement d'un corps soumis à la seule action de la pesanteur, lorsque le mouvement s'effectue dans un espace assez restreint pour que cette action puisse être regardée comme ayant partout la même direction et une intensité constante. Dans ce cas, il arrive de plus que la fonction $f(z)$ est constante.

L'intégrale des forces vives prend alors la forme suivante, l'axe des z étant dirigé de bas en haut :

$$\tfrac{1}{2}\,m(v^2 - v_0^2) = mg(z_0 - z)$$

ou

$$\tfrac{1}{2}(v^2 - v_0^2) = g(z_0 - z) = gh,$$

h étant la hauteur de la chute.

Les surfaces de niveau sont des plans horizontaux, donc : *quelle que soit la trajectoire qu'un point matériel pesant soit assujetti à parcourir, le carré de la vitesse de ce point, et par suite la grandeur de cette vitesse elle-même, ne dépend à chaque instant que du niveau d'où il est tombé, et de celui où il est quand on cherche sa vitesse.* L'équation ne donnant que le carré de la vitesse, son sens n'est pas déterminé.

Si l'on fait $v_0 = 0$, on a l'équation bien connue

$$v^2 = 2gh,$$

qui donne la vitesse acquise par un mobile tombé d'une hau-

teur h, soit librement, soit en suivant une courbe quelconque : c'est ce qu'on appelle la *vitesse due à la hauteur h*. Les obstacles n'ont pour effet que de changer la direction de la vitesse sans influer sur sa grandeur.

Si, au lieu de laisser tomber le corps, on le lance verticalement, ou sur une surface fixe avec une vitesse v, il remonte à une hauteur

$$h = \frac{v^2}{2g}:$$

c'est la *hauteur due à la vitesse v* (*).

Théorèmes relatifs aux quantités de mouvement.

Reprenons notre équation fondamentale, relative à la projection du mouvement sur un axe fixe quelconque,

$$m\frac{dv_x}{dt} = X.$$

Multiplions par dt et intégrons, il vient

$$(7) \qquad mv_x - mv_{0,x} = \int_{t_0}^{t} X\,dt.$$

Définitions. — 1° Le produit mv de la masse d'un point matériel par la vitesse dont il est animé s'appelle la *quantité de mouvement* de ce point; mv_x est la *quantité de mouvement de la projection du point sur l'axe des x*, ou la projection sur le même axe de la quantité de mouvement mv, m étant un simple coefficient numérique dont la grandeur géométrique v est affectée.

2° Le produit $F\,dt$ est l'*impulsion élémentaire* de la force F

(*) Lorsqu'un corps est lancé obliquement avec une vitesse v, et abandonné ensuite librement à l'action de la pesanteur qui lui fait décrire une parabole, il ne remonte pas à la hauteur due à cette vitesse. Cela tient à ce qu'au point le plus haut de la trajectoire la vitesse est horizontale, mais elle n'est pas nulle, non plus que la force vive. Si le corps était assujetti à suivre une courbe ou une surface, il pourrait remonter jusqu'à ce que sa vitesse fût nulle, et atteindrait alors la hauteur $\frac{v^2}{2g}$.

pendant le temps dt, et l'intégrale définie $\int_{t_0}^{t} \mathrm{F}\,dt$ est l'*impulsion totale* pendant le temps fini $t - t_0$. $\mathrm{X}\,dt$ est l'*impulsion de la projection de la force* F ou la *projection de l'impulsion* de cette même force F, le temps devant être également considéré comme une quantité purement numérique.

Traitons d'une manière analogue l'équation de la projection du mouvement sur la tangente

$$m\frac{dv}{dt} = \mathrm{P}.$$

Multiplions par dt et intégrons, il vient

$$(8) \qquad mv - mv_0 = \int_{t_0}^{t} \mathrm{P}\,dt.$$

Les équations (7) et (8) s'énoncent de la manière suivante en langage ordinaire :

THÉORÈME I. — *L'accroissement de la projection sur un axe fixe de la quantité de mouvement d'un point matériel, pendant un temps quelconque, est égal à l'impulsion totale, pendant le même temps, de la projection de la force qui agit sur ce point matériel.*

THÉORÈME II. — *L'accroissement de la quantité de mouvement est égal à l'impulsion totale de la force tangentielle.*

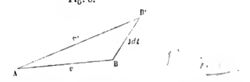
Tout ce que nous avons eu occasion de dire relativement à l'intégrale qui représente le travail s'applique identiquement à celles qui représentent les impulsions totales.

Ces quantités, qui ont dans toute hypothèse un sens bien défini, peuvent, dans certains cas, s'évaluer soit rigoureusement, soit approximativement. On aura alors une *intégrale* du mouvement; mais, dans tous les cas, l'équation est vraie sous sa forme différentielle, puisqu'elle n'est autre chose qu'une combinaison des équations fondamentales du mouvement.

On peut arriver à un autre théorème également très-important, en considérant, au lieu des projections des quantités de mouvement et des impulsions, les moments de ces diverses lignes par rapport à un axe quelconque.

Nous avons vu, en Cinématique, que la vitesse v' à l'époque $t + dt$ est la résultante de la vitesse v au temps t et de $J\,dt$. Multiplions par m les trois côtés du triangle ABB′ (*fig.* 8)

Fig. 8.



formé par ces trois lignes, nous obtiendrons un triangle semblable, dont les côtés seront les quantités de mouvement initial et final, et l'impulsion de la force $F\,dt$; alors en appliquant le théorème de Varignon, on peut écrire que le moment de la résultante par rapport à un axe quelconque est égal à la somme des moments des composantes. Nous aurons ainsi

$$\mathfrak{M}\, m v' - \mathfrak{M}\, m v = \mathfrak{M}\, F\,dt$$

ou

$$d\mathfrak{M}\, m v = \mathfrak{M}\, F\,dt. \tag{9}$$

Donc :

Théorème III. — *L'accroissement élémentaire du moment de la quantité de mouvement, pris par rapport à un axe quelconque, est égal au moment de l'impulsion élémentaire de la force autour du même axe.*

Quand le second membre de l'équation (9) est une différentielle exacte, on obtient une intégrale du mouvement; dans le cas contraire, on n'a qu'une équation différentielle pouvant tenir lieu d'une des équations ordinaires.

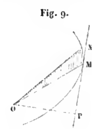
Parmi les cas où l'intégration est possible, il faut distinguer celui où le moment de la force par rapport à l'axe est constamment nul : on conclut alors de l'équation (9) que $\mathfrak{M}\, m v$ est constant. Donc :

Théorème IV. — *Quand la force qui sollicite un point mobile rencontre constamment une droite fixe, le moment de la quantité de mouvement du point par rapport à cette droite est constant.*

Ce résultat s'énonce ordinairement d'une autre manière, en ayant égard aux considérations géométriques suivantes.

Expressions diverses du moment de la quantité de mouvement d'un point. — Prenons un plan de projection perpendiculaire à l'axe des moments (*fig.* 9), et soit O le point qui

Fig. 9.



projette cet axe tout entier. Désignons par $\frac{d\sigma}{dt}$ la projection de la vitesse v, et par p la perpendiculaire abaissée du point O sur la direction de cette vitesse, on a

$$\mathfrak{M}\, mv = mp\,\frac{d\sigma}{dt}.$$

Or $p\,d\sigma$ représente le double de l'aire $d\lambda$ décrite par le rayon vecteur OM pendant le temps dt; donc

$$\mathfrak{M}\, mv = 2m\,\frac{d\lambda}{dt}.$$

Les diverses expressions analytiques de l'aire $d\lambda$ donnent autant d'expressions du moment de la quantité de mouvement. Si l'on rapporte le mouvement à l'axe O pris pour axe des z, et à deux autres axes rectangulaires compris dans le plan de notre figure, on a

$$(10) \qquad \mathfrak{M}\, mv = \left(x\,\frac{dy}{dt} - y\,\frac{dx}{dt}\right).$$

En coordonnées polaires, θ désignant l'angle du rayon vecteur r avec l'axe O, et ψ l'azimut de ce rayon vecteur par rapport à un plan fixe quelconque, on a

$$(11) \qquad \mathfrak{M}\, mv = mr^2\sin^2\theta\,\frac{d\psi}{dt}.$$

Théorème des aires. — Cela posé, quand le moment de la force par rapport à l'axe O est constamment nul, c'est-à-dire quand la projection de la force passe toujours par le point fixe O, le moment de la quantité de mouvement reste invariable; on peut donc écrire dans ce cas

$$\frac{d\lambda}{dt} = C,$$

ou

$$\lambda = Ct,$$

et énoncer le théorème IV sous la forme suivante :

Théorème V. — *Quand la projection sur un certain plan de la force qui sollicite un point mobile passe par un pôle fixe, l'aire décrite sur le même plan par le rayon vecteur issu de ce pôle croît proportionnellement au temps.*

Réciproquement : *Toutes les fois que les aires sont proportionnelles au temps, la force est constamment dirigée vers l'origine fixe par des rayons vecteurs.*

C'est ainsi que Newton a conclu de la deuxième loi de Kepler que la force qui sollicite les planètes passe constamment par le centre du Soleil.

Quand la force, au lieu de rencontrer simplement une droite fixe, passe par un point fixe, le théorème des aires a lieu pour un plan de projection quelconque, l'axe des moments passant toujours par la projection du point fixe. Dans ce cas, la trajectoire est une courbe plane, le mobile ne sortant pas du plan déterminé par le point fixe et par la direction de la vitesse initiale.

Utilité des théorèmes généraux de la Dynamique.

Nous avons dit que les théorèmes qui précèdent, quand ils ne donnent pas d'intégrales, fournissent des équations différentielles qu'on peut substituer à un nombre égal des équations ordinaires de la Dynamique. On fait un fréquent usage de ces théorèmes dans les applications, pour éliminer, sans transformations algébriques, certaines forces connues ou inconnues.

C'est ainsi que les forces dont le travail est nul disparaissent de l'équation des forces vives; celles qui rencontrent une droite fixe, de l'équation des moments pris par rapport à cette droite, etc. Ces méthodes, spéciales à chaque problème, servent également quand le point mobile est assujetti à certaines conditions, qui restreignent le nombre de variables indépendantes : on est ainsi dispensé de recourir aux méthodes générales de Lagrange, dont j'ai parlé.

Mouvement d'un point sur une sphère fixe. — Le système de coordonnées naturellement indiqué ici est le système polaire. En effet, il suffira de considérer dans les calculs la coordonnée r comme une constante, pour tenir compte de la condition imposée au mobile. Il ne restera plus ainsi dans les équations que deux variables : la *longitude* ψ, et la *colatitude* θ; ces deux variables sont tout à fait indépendantes, et nous allons chercher, pour déterminer ces inconnues, deux équations où n'entre pas la réaction de la surface fixe.

Les formules qui servent à passer du système rectiligne au système actuel sont les suivantes :

$$x = r\sin\theta\cos\psi,$$
$$y = r\sin\theta\sin\psi,$$
$$z = r\cos\theta.$$

Différentions ces équations en considérant r comme une constante, et faisons la somme des carrés de dx, dy, dz, on trouve

$$ds^2 = r^2\,d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,d\psi^2,$$

d'où, en divisant par dt^2,

$$v^2 = r^2\left[\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \sin^2\theta\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2\right].$$

Cela posé, la réaction de la sphère étant normale à la trajectoire du point mobile, le principe des forces vives fournit une première équation indépendante de cette réaction :

$$(1)\quad d\tfrac{1}{2}mr^2\left[\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \sin^2\theta\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2\right] = \mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \mathrm{Z}\,dz.$$

De même, la réaction inconnue, passant nécessairement au

centre de la sphère, a un moment nul par rapport à un axe quelconque conduit par ce point. On aura donc une deuxième équation qui ne contiendra pas cette réaction, en appliquant le principe des aires sur un plan quelconque, par exemple sur le plan xOy, perpendiculaire à l'axe de notre système polaire. Cette équation est, en se reportant à l'expression trouvée plus haut pour le moment de la quantité de mouvement,

$$(2) \qquad dm\, r^2 \sin^2\theta \frac{d\psi}{dt} = (Yx - Xy)dt.$$

Mouvement du pendule simple. — Dans le problème du pendule simple, les forces agissant sur le point mobile se réduisent à la pesanteur seule et l'on a, en supposant que l'axe des z ait été pris vertical et dirigé vers le zénith,

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = -mg.$$

Les équations précédentes s'intègrent une première fois, et donnent, en désignant par l la longueur du pendule, égale au rayon r de la sphère,

$$(3) \qquad \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \sin^2\theta\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = \theta_0'^2 + \sin^2\theta_0\,\psi_0'^2 + \frac{2g}{l}(\cos\theta_0 - \cos\theta),$$

$$(4) \qquad \sin^2\theta \frac{d\psi}{dt} = \sin^2\theta_0\,\psi_0'.$$

Il suffit d'éliminer $\frac{d\psi}{dt}$ entre ces deux équations pour déterminer θ en fonction de t par une quadrature. Il vient

$$(5) \quad \sin\theta\frac{d\theta}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2g}{l}(\cos\theta_0 - \cos\theta)(1 - \cos^2\theta) + \sin^4\theta_0\,\psi_0'^2(\cos^2\theta_0 - \cos^2\theta) + \theta_0'^2(1 - \cos^2\theta)}.$$

La quantité soumise au radical est un polynôme du troisième degré en $\cos\theta$ dont les trois racines sont toujours réelles. En effet, le polynôme est positif pour $\theta = \theta_0$, il est négatif pour $\cos\theta = \pm 1$; enfin il se retrouve positif pour $\cos\theta = \infty$. On conclut de là l'existence de deux racines comprises entre -1 et $+1$, racines que je représenterai par $\cos\theta_1$ et $\cos\theta_2$; quant à

la troisième racine h, elle est positive et plus grande que 1, elle ne saurait représenter un cosinus. On peut donc écrire l'équation (5)

$$(6)\quad \sin\theta\frac{d\theta}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2g}{l}(h-\cos\theta)(\cos\theta-\cos\theta_1)(\cos\theta_2-\cos\theta)}.$$

Il suit de là que l'angle θ reste compris entre les deux angles θ_1 et θ_2; l'extrémité du pendule ne sort pas de la zone horizontale limitée par les deux petits cercles qui répondent aux deux limites de l'angle θ. La vitesse angulaire du pendule en projection horizontale est variable, conformément à la relation

$$(7)\quad \frac{d\psi}{dt} = \frac{\sin^2\theta_0}{\sin^2\theta}\psi'_0;$$

elle est comprise entre deux limites, comme l'angle θ, dont elle suit les variations.

Quant à la relation entre l'angle θ et le temps t, elle dépend des fonctions elliptiques de première espèce.

Un cas remarquable est celui dans lequel deux des racines de notre polynôme sont égales; c'est ce qui peut arriver de deux manières :

1° θ_1 peut devenir égal à θ_2, et, dans ce cas, la valeur commune de ces deux quantités ne peut être que θ_0; on a alors

$$\theta = \theta_0 = \text{const.},$$

et le polynôme doit admettre en facteur le carré de

$$(\cos\theta - \cos\theta_0);$$

ce qui exige qu'on ait à l'origine

$$\theta'_0 = 0 \quad \text{et} \quad \frac{g}{l} = -\psi'^2_0\cos\theta_0.$$

Alors le pendule décrit un cercle horizontal avec une vitesse angulaire constante et égale à la vitesse angulaire initiale ψ'_0.

2° La plus grande des trois racines et la racine $\cos\theta_2$ peuvent toutes deux devenir égales à l'unité; ce qui exige les deux conditions

$$\psi'_0 = 0,$$

$$\theta'^2_0 = \frac{2g}{l}(1-\cos\theta_0).$$

On obtient ainsi

$$\tang \tfrac{1}{4}\theta = \tang \tfrac{1}{4}\theta_0 \, e^{t\sqrt{\frac{g}{l}}}.$$

Pendule ordinaire. — Il résulte de l'équation (7) que, si la vitesse horizontale $\frac{d\psi}{dt}$ est nulle à l'instant initial, elle reste nulle pendant tout le mouvement, lequel s'effectue alors dans un plan vertical. C'est le cas des expériences ordinaires sur le pendule. Les lois qui répondent à ce cas particulier sont bien connues, ainsi que la formule qui donne la durée des petites oscillations, formule que nous retrouverons pour exprimer rigoureusement ou approximativement les lois d'un grand nombre de phénomènes de Mécanique physique.

Des forces dites instantanées.

Nous avons, pour simplifier le langage, désigné sous le nom d'*impulsion* d'une force F, agissant pendant un temps t, l'intégrale définie

$$\int_0^t F\,dt,$$

laquelle est réduite à Ft si la force est constante ou supposée telle. En divisant l'intégrale qui donne l'impulsion par le temps t, on a l'*effort moyen*, correspondant à l'espace de temps considéré.

L'impulsion d'une force est une quantité composée de la force et du temps de son action, comme le travail est une quantité composée de la grandeur de la force et du déplacement du point auquel elle est appliquée.

Cette impulsion est mesurée par l'accroissement de la quantité de mouvement du mobile pendant le temps considéré, ou par la quantité de mouvement finie communiquée à un corps en repos par une force agissant sur ce corps pendant un certain temps.

Si l'on mesure la masse et la vitesse d'un projectile à la sortie d'un canon, on a, par le produit mv, la valeur de l'impulsion de la force produite par la déflagration de la poudre. Quant à la force elle-même, on ne peut pas la mesurer ainsi

directement, à moins qu'on ne connaisse les lois de son action. On obtiendra sa valeur moyenne, si l'on connaît seulement la durée de cette action.

Il est bien essentiel seulement de remarquer qu'aucune force ne peut imprimer une vitesse finie à une masse, quelque faible qu'elle soit, sans y mettre un certain temps et sans faire parcourir un certain espace à son point d'application sous son action continue. Il n'y a donc pas, à proprement parler, de *force instantanée*. Néanmoins, si l'effet est produit dans un temps si court que rien n'ait pu changer sensiblement dans la position du point, on pourra, dans la plupart des cas, faire abstraction de ce temps et supposer à l'action la durée que l'on voudra, pourvu que cette durée soit très-petite et que l'intégrale définie

$$\int_0^\theta F\,dt$$

ait la valeur qu'on peut évaluer en mesurant l'accroissement de la quantité de mouvement du corps qui reçoit l'action de la force F.

Au lieu de l'expression malheureuse de « force instantanée », nous emploierons le mot de *percussion* pour désigner par exemple un coup de marteau, un coup de queue au jeu de billard, etc. La *direction* de la percussion sera celle de la force F, qui est censée ne pas changer sensiblement pendant la courte durée de son action ; et ce qu'on peut appeler l'*intensité* de la percussion, ce qui en fait la mesure, c'est l'impulsion totale

$$P = \int_0^\theta F\,dt.$$

Les percussions se composent comme des forces. En effet, dans toutes les équations qui expriment des relations entre des forces équivalentes, équations qui sont linéaires par rapport aux forces, il n'y a qu'à multiplier par dt et à intégrer pour avoir des relations entre des percussions, les facteurs qui multiplient les forces étant supposés constants pendant le temps qui sépare les deux limites de l'intégrale.

Toutefois il faut bien se garder de confondre une percussion



avec une force. Il n'y a même pas homogénéité entre ces deux sortes de quantités, puisque la percussion se mesure par l'impulsion de la force inconnue qui produit les effets observés, c'est-à-dire par le produit de la force par le temps de son action. Quand nous emploierons le mot *force*, ce sera toujours pour désigner un nombre de kilogrammes, mesurable au moyen de la balance ordinaire ou de tout autre procédé équivalent.

Le mot de *force* est pris assez fréquemment dans un grand nombre d'acceptions d'autant plus vicieuses qu'elles sont plus vagues et qu'on peut, de prémisses mal définies, tirer d'une manière également légitime les conséquences les plus directement opposées.

Descartes écrivait à Mersenne : « J'ai parlé de la force qui sert pour lever un poids, laquelle a deux dimensions, non de celle qui sert en chaque point pour le soutenir, laquelle n'a qu'une dimension (*). »

Cela veut dire : Quand il s'agit de soutenir un poids, la force seule est en jeu, tandis que pour lui communiquer une vitesse finie il faut avoir égard au produit de la force par le temps de son action.

Un peu plus tard, et jusqu'au milieu du siècle dernier, les géomètres ont été très-longtemps partagés sur la question de savoir quelle doit être la mesure de la *force des corps en mouvement;* c'est-à-dire de décider si cette *force* est proportionnelle au produit de la masse par le carré de la vitesse : par exemple, si un corps double d'un autre, et qui a 3 fois autant de vitesse, a 18 fois autant de force, ou 6 fois autant seulement.

« Or, dit d'Alembert, quand on parle de la *force des corps en mouvement*, ou l'on n'attache point d'idée nette au mot qu'on prononce, ou l'on ne peut entendre par là en général que la propriété qu'ont les corps qui se meuvent de vaincre les obstacles qu'ils rencontrent ou de leur résister. Ce n'est donc ni par l'espace qu'un corps parcourt uniformément, ni par le temps qu'il emploie à parcourir cet espace, ni enfin par la considération simple, unique et abstraite de sa masse et de sa

(*) Édition de M. Cousin, t. VI, p. 329.

vitesse, qu'on doit estimer immédiatement la *force :* c'est uniquement par les obstacles que le corps rencontre et par la résistance que lui font ces obstacles. Plus l'obstacle qu'un corps peut vaincre et auquel il peut résister est considérable, plus on peut dire que sa *force* est grande, pourvu que, sans vouloir représenter par ce mot un prétendu être qui réside dans le corps, on ne s'en serve que comme une manière abrégée d'exprimer un fait.

» Ceci bien entendu, il est clair qu'on peut opposer au mouvement d'un corps trois sortes d'obstacles : ou des obstacles invincibles qui anéantissent tout à fait son mouvement, quel qu'il puisse être; ou des obstacles qui n'aient précisément que la résistance nécessaire pour anéantir le mouvement du corps et qui l'anéantissent dans un instant : c'est le cas de l'équilibre; ou enfin des obstacles qui anéantissent le mouvement peu à peu : c'est le cas du mouvement retardé. Comme les obstacles insurmontables anéantissent également toutes sortes de mouvement, ils ne peuvent servir à faire connaître la force; ce n'est donc que dans l'équilibre, ou dans le mouvement retardé, qu'on doit en chercher la mesure. Or tout le monde convient qu'il y a équilibre entre deux corps quand les produits de leurs masses par leurs vitesses sont égaux de part et d'autre. Donc, dans l'équilibre, le produit de la masse par la vitesse, ou, ce qui est la même chose, la quantité de mouvement, peut représenter la force. Tout le monde convient aussi que, dans le mouvement retardé, le nombre des obstacles vaincus est comme le carré de la vitesse; en sorte qu'un corps qui a fermé un ressort, par exemple, avec une certaine vitesse, pourra, avec une vitesse double, fermer, ou tout à la fois, ou successivement, non pas deux, mais quatre ressorts semblables au premier, neuf avec une vitesse triple, et ainsi du reste. D'où les partisans des forces vives concluent que la force des corps qui se meuvent actuellement est, en général, comme le produit de la masse par le carré de la vitesse.

» Soit qu'un corps ait une simple tendance à se mouvoir avec une certaine vitesse, tendance arrêtée par quelque obstacle, soit qu'il se meuve réellement et uniformément avec cette vitesse; soit enfin qu'il commence à se mouvoir avec cette même vitesse, laquelle se consume et s'anéantisse peu

à peu par quelque cause que ce puisse être : dans tous ces cas, l'effet produit par le corps est différent, mais le corps considéré en lui-même n'a rien de plus dans un cas que dans un autre; seulement, l'action de la cause qui produit l'effet est différemment appliquée. Il n'y a donc rien d'étonnant à ce que cet effet soit différent suivant les conditions dans lesquelles on place le corps et qu'il soit tantôt proportionnel à la simple vitesse, tantôt comme le carré de cette vitesse. »

Pour en revenir aux forces instantanées, quand nous verrons une masse m se mettre en mouvement avec une vitesse v, sous l'action d'une force agissant pendant un temps inappréciable, mais néanmoins fini, nous dirons que le produit mv mesure l'*impulsion* de cette force, la quantité mv^2 ou $\frac{1}{2}mv^2$ le *travail* développé par cette force. Quant à la *force* elle-même, tout ce qu'on peut espérer déterminer, c'est sa valeur moyenne, quand on connaît le temps qu'a duré son action.

§ V. — Théorie des mouvements relatifs.

Quand on connaît la force qui sollicite un mobile, on sait poser les équations différentielles du mouvement absolu de ce mobile; et, ce mouvement étant une fois déterminé, on trouvera, par une simple transformation de coordonnées, le mouvement du même point relativement à tout système mobile suivant une loi donnée.

Mais on peut aussi déterminer directement le mouvement relatif, lequel n'est autre chose, comme on le sait, que le mouvement absolu d'un certain point fictif dont les coordonnées, par rapport à un système d'axes immobiles, sont les mêmes que les coordonnées relatives du point dont on s'occupe. En effet, nous connaissons par la Cinématique la grandeur et la direction de l'accélération totale relative J_r; or il est bien évident que les choses se passent comme si le point fictif, supposé doué d'une masse m, était sollicité par une force mJ_r : c'est la *force relative*, ou la *force apparente*, la force capable de produire toutes les circonstances du mouvement relatif. On peut donc poser immédiatement les équations différentielles du mouvement relatif; quant à la détermination des arbitraires,

elle se fera ensuite sans difficulté, au moyen des coordonnées et des vitesses relatives initiales.

Cela posé, l'accélération J_r est la résultante :

1° De l'accélération J, due à la force réelle F;

2° D'une accélération j', égale et opposée à l'accélération d'entraînement;

3° De l'accélération centrifuge composée j'', perpendiculaire à la vitesse relative et à l'axe instantané de la rotation d'entraînement, et dirigée vers la *gauche* de la vitesse relative.

Appelons *force d'entraînement* la force mj' qu'il faudrait appliquer à un point coïncidant avec notre point mobile et supposé doué d'une masse m pour lui communiquer le mouvement du point correspondant du système de comparaison : la deuxième composante F' de la force apparente est égale et opposée à cette force d'entraînement. C'est la force d'inertie du point donné, considéré comme lié aux axes mobiles. Donc :

Théorème. — *On peut toujours traiter le mouvement relatif d'un point matériel comme un mouvement absolu, pourvu qu'après avoir attribué au point une vitesse initiale convenable on adjoigne, à la force qui le sollicite réellement, la force d'inertie du point du système des axes qui coïncide avec le point étudié, et la force centrifuge composée.*

Tel est le théorème de Coriolis.

Je rappelle que la force centrifuge composée a pour expression

$$F'' = 2m\omega v_r \sin \overline{\omega, v_r} \text{ (*)},$$

v_r étant la vitesse relative et ω la vitesse d'entraînement. Les composantes de cette force suivant les axes mobiles sont, en désignant par p, q, r les projections de ω sur ces mêmes axes,

$$X'' = 2m\left(r\frac{dy}{dt} - q\frac{dz}{dt}\right),$$

$$Y'' = 2m\left(p\frac{dz}{dt} - r\frac{dx}{dt}\right),$$

$$Z'' = 2m\left(q\frac{dx}{dt} - p\frac{dy}{dt}\right).$$

(*) *Voir* la première Partie de cet Ouvrage; *Cinématique*, p. 170.

Cas particuliers du théorème de Coriolis.

1° La force centrifuge composée est nulle dans les trois cas suivants : *quand la vitesse relative est nulle,* parce que l'on a $v_r = 0$, c'est le cas de l'équilibre relatif; *quand la direction de l'axe instantané se confond avec celle de la vitesse relative,* parce qu'on a $\sin\widehat{\omega, v_r} = 0$; enfin *quand le mouvement des axes est une simple translation,* parce qu'on a $\omega = 0$.

Dans ces trois hypothèses, il suffit de joindre, à la force réelle agissant sur le point donné, la force d'inertie de ce point, considéré comme lié aux axes mobiles.

2° Quand le mouvement du système d'entraînement est une pure translation, et que, de plus, cette translation est rectiligne et uniforme, il n'y a plus aucune force à joindre à la force F. Les équations différentielles du mouvement relatif sont identiques à celles du mouvement absolu, et les intégrales des deux problèmes ont la même forme.

Seulement, nous savons que tout n'est pas dit quand on a intégré les équations différentielles d'un problème de Mécanique, il faut encore, au moyen des données du mouvement initial, déterminer les constantes que l'intégration laisse arbitraires. Or les grandeurs et les directions des vitesses initiales ne sont pas les mêmes dans le mouvement relatif et dans le mouvement absolu, et cette circonstance, en changeant les constantes arbitraires introduites par les intégrations, fait seule que le mouvement relatif diffère du mouvement absolu.

3° Si le mouvement d'entraînement se compose de deux rotations, la force centrifuge composée totale est la résultante des deux forces analogues qui seraient introduites par les deux rotations composantes. En effet, posons

$$p = p_1 + p_2,$$
$$q = q_1 + q_2,$$
$$r = r_1 + r_2,$$

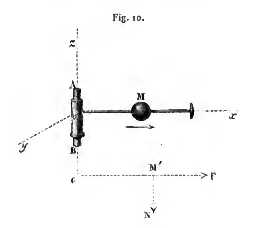
et remplaçons p, q, r, par ces valeurs dans les expressions des composantes de la force centrifuge composée : on obtient évi-

demment pour chacune d'elles la somme de celles qui résulteraient de chacun des mouvements de rotation.

4° En général, si le mouvement des axes mobiles est un mouvement composé de deux autres mouvements quelconques, la force centrifuge composée est la résultante des forces apparentes analogues résultant de chacun des mouvements composants en particulier. On pourra donc déterminer isolément l'effet produit par chacun de ces mouvements, ou bien calculer d'un seul coup l'influence du mouvement composé, selon les cas.

Application de la théorie des forces apparentes. — Reprenons le problème déjà étudié d'une bille M (que nous assimilerons à un simple point matériel), mobile le long d'une tige qui tourne uniformément avec une vitesse ω (*fig.* 10).

Fig. 10.



La seule force réellement agissante est la réaction normale de la tige N; la théorie ordinaire donne les lois du mouvement du point M, sous l'influence d'une pareille force; et il résulte de ces lois que le mobile s'éloigne de l'axe ou du centre de rotation, sans qu'il soit besoin de faire intervenir pour cela une force particulière tirant directement la bille dans le sens de la flèche.

On peut aussi, par un artifice commode, appliquer à ce problème la théorie des mouvements relatifs, en rapportant le

mouvement à trois axes ox, oy, oz, mobiles avec la vitesse angulaire ω, de telle sorte que le point M, dans son mouvement relatif, reste constamment sur l'axe des x. Pour trouver la loi de son mouvement sur cette droite, il faudra joindre à la force N les deux forces fictives que l'on connaît.

Or la force N, ainsi que la force centrifuge composée, étant constamment normale à la trajectoire oblique, ces deux forces ne peuvent produire que des pressions sur la tige; et l'accélération du mobile se présente comme produite uniquement par la force centrifuge, de sorte que l'on a

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \omega^2 x,$$

équation facile à intégrer. On ne saurait donc trop répéter que c'est uniquement en vue d'un artifice commode et par une fiction, très-licite du moment qu'elle n'est pas déguisée, qu'on peut ainsi considérer la force centrifuge comme contribuant au mouvement du point et non pas seulement comme une réaction de ce point matériel contre les obstacles gênant son mouvement.

Extension des théorèmes généraux de la Dynamique au cas des mouvements relatifs.

Il est parfaitement évident qu'on peut appliquer aux mouvements relatifs tous les théorèmes généraux de la Dynamique, pourvu qu'on ait soin de tenir compte des forces fictives qui permettent d'assimiler un mouvement relatif à un mouvement absolu.

Nous ferons seulement ici la remarque que, pour établir l'équation des forces vives, il n'y a pas à s'inquiéter de la force centrifuge composée, dont le travail est nul, puisque cette force est constamment normale à la trajectoire relative.

Mouvement des corps près de la surface de la Terre.

Ainsi que nous l'avons fait en Cinématique, prenons pour axe des z la verticale du lieu dirigée de bas en haut; pour axe des x, la partie nord de la tangente à la méridienne, enfin

pour axe des y, la partie est de la perpendiculaire. Désignons par λ la colatitude du lieu, par n la rotation de la Terre, prise positivement, soit

$$n = 0{,}0000729.$$

Force centrifuge composée. — Nous avons obtenu pour les composantes de la force centrifuge composée

$$(1)\quad \begin{cases} X'' = -2mn\cos\lambda\,\dfrac{dy}{dt}, \\ Y'' = 2mn\left(\cos\lambda\,\dfrac{dx}{dt} - \sin\lambda\,\dfrac{dz}{dt}\right), \\ Z'' = 2mn\sin\lambda\,\dfrac{dy}{dt}. \end{cases}$$

Force d'inertie. — Si nous négligeons pour le moment la translation de la Terre autour du Soleil, la force opposée à la force d'entraînement se réduit à la force centrifuge égale à $mn^2\rho$, en désignant par ρ la distance du point mobile à l'axe du monde. Les composantes de cette force seront

$$X' = -mn^2\rho\cos\lambda,$$
$$Y' = 0,$$
$$Z' = mn^2\rho\sin\lambda,$$

ou, en supposant la Terre sphérique, désignant par R le rayon de l'équateur et négligeant les variations de distance du point mobile au centre de la Terre,

$$(2)\quad \begin{cases} X' = -mn^2R\sin\lambda\cos\lambda, \\ Y' = 0, \\ Z' = mn^2R\sin^2\lambda. \end{cases}$$

Le maximum de cette force correspond à l'équateur, où elle a pour valeur mn^2R; ($n^2R = 0^m{,}033852$).

Équilibre des corps à la surface de la Terre. — Les corps que nous sommes accoutumés à regarder comme étant en équilibre participent en réalité au mouvement de la Terre, et il faudra, pour tenir compte de cette circonstance, introduire la force centrifuge dans les équations ordinaires de l'équilibre.

en même temps que toutes les forces réelles. Quant à la force centrifuge composée, elle ne joue aucun rôle, ainsi que nous l'avons dit, dans le cas de l'équilibre relatif.

Or, parmi les forces réelles figure toujours celle qui, sous le nom de *pesanteur* ou *gravité*, sollicite tous les corps qui nous environnent. Cherchons d'abord à nous faire une idée nette de cette force, dont le rôle est si important.

Définition de la pesanteur. — On se rappelle que, dans les applications de la Statique, nous avons appelé *pesanteur* ou *gravité* la force, dont les effets nous sont bien familiers, en vertu de laquelle les corps tendent à tomber à la surface de la Terre : de sorte que le *poids* d'un corps est, par définition, une force égale et opposée à la réaction du fil ou de l'appui qui l'empêche de tomber.

En faisant alors une étude expérimentale assez grossière de cette force, c'est-à-dire en observant ses effets les plus marqués, sans nous préoccuper des causes de ces phénomènes, nous avons annoncé une théorie ultérieure plus minutieuse ; le moment est venu de tenir notre promesse.

Considérons d'abord un corps en équilibre relatif, reposant sur un support ou sur le sol, et réduit par la pensée à un simple point matériel. Les forces qui agissent réellement sur lui sont :

1° L'attraction qu'il éprouve de la part de la Terre, en vertu du principe de la gravitation universelle, cause principale des phénomènes que présentent les corps pesants;

2° La pression qui est exercée sur lui de bas en haut par le support.

Ces deux forces réelles et la force centrifuge se faisant équilibre, la réaction du support est égale et directement opposée à la résultante de la force centrifuge et de l'attraction terrestre. Cette résultante n'est donc autre chose que ce que nous nommons le *poids* du corps.

Ainsi on ne doit pas confondre le poids d'un corps avec l'attraction que ce corps éprouve de la part de la Terre; le poids s'obtient en composant cette attraction avec la force centrifuge due à la rotation de la Terre.

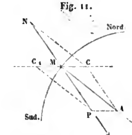
De la verticale. — Les mêmes considérations s'appliquent à l'équilibre d'un corps suspendu à l'extrémité inférieure



d'un fil dont l'extrémité supérieure est fixe. La direction du *fil à plomb*, c'est-à-dire ce qu'on nomme la *verticale*, est précisément la direction de cette résultante de l'attraction de la Terre et de la force centrifuge.

La force centrifuge est dirigée suivant le prolongement MC_1 du rayon du cercle que le corps décrit autour de l'axe du monde, en vertu de la rotation de la Terre (*fig.* 11); elle fait

Fig. 11.



donc en général un angle C_1MA plus ou moins grand avec l'attraction de la Terre sur le corps. Par suite, la résultante a généralement une direction MP différente de celle des composantes, variable d'ailleurs suivant le lieu.

La composante Z' étant toujours positive, le poids est toujours plus petit que ce qu'il serait sans l'intervention de la force centrifuge. Or cette force, dans le cas d'un point situé à l'équateur, atteint sa valeur maxima; elle se retranche directement de l'attraction terrestre. Nous avons trouvé

$$n^2 R = 0^m,033852 = \frac{1}{289} g = \frac{1}{(17)^2} g.$$

La force centrifuge n'est qu'une assez petite fraction du poids du corps; mais, si la Terre tournait seulement dix-sept fois plus vite, son attraction serait complétement équilibrée par la force centrifuge, et la pesanteur serait nulle à l'équateur.

La force centrifuge décroît proportionnellement au cosinus de la latitude, et cet effet se combine avec celui de l'aplatissement de la Terre, pour produire la variation de la pesanteur observée vers la fin du siècle dernier.

Galilée avait certainement l'idée de la force centrifuge, et, dans un de ses dialogues (*), il explique clairement que la rotation de la Terre ferait prendre aux corps une vitesse verticale apparente dirigée de bas en haut, s'ils n'étaient retenus par la pesanteur. Mais il se trompe en ajoutant que la pesanteur, quelque petite qu'on la supposât, suffirait pour empêcher un pareil mouvement.

Tout ce que nous avons dit jusqu'ici en introduisant la considération des forces fictives pouvait s'établir également bien par les procédés ordinaires de la Dynamique. Considérons en effet un corps en repos relatif, sur un appui fixe. Ce corps n'est soumis qu'à deux forces : l'attraction de la Terre et la réaction de l'appui; seulement, bien qu'il nous paraisse en repos, il décrit en réalité d'un mouvement uniforme un cercle de rayon ρ; donc, les forces qui le sollicitent, c'est-à-dire l'attraction de la Terre et la réaction de l'appui, doivent se réduire à une force centripète égale à $mn^2\rho$. Donc, le poids, qui est directement opposé à la réaction de l'appui, est la résultante de l'action de la Terre et d'une force fictive égale et opposée à la force centripète : c'est la force centrifuge. Nous arrivons donc au même résultat, et nous justifions ainsi l'emploi de cette fiction, qui d'ailleurs, après les explications qui ont été données, ne peut pas induire en erreur.

Il résulte de là que, dans les applications, nous n'avons pas à nous inquiéter de tenir compte séparément de l'attraction terrestre et de la force centrifuge. La *pesanteur*, telle que nous l'avons définie et telle qu'on la définit ordinairement, comprend ces deux forces ensemble, de sorte qu'on doit poser, dans les questions d'équilibre et de mouvement des corps pesants,

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l} X + X' = 0, \\ Y + Y' = 0, \\ Z + Z' = -mg. \end{array}\right.$$

Il est bien essentiel de remarquer qu'au point de vue auquel

(*) Voyez *Dialogo sopra le due massimi sistemi del mundo*, p. 185 et suiv. de l'édition de Florence, 1710.

nous sommes actuellement, quand on se déplace à la surface de la Terre ou qu'on s'élève au-dessus, la direction de la verticale et la grandeur de la pesanteur varient en raison de la variation de l'attraction et de celle de la force centrifuge. Quand on suppose, pour un point situé à une distance $\delta\rho$ de la Terre, que la pesanteur est constante, on néglige le produit de $n^2\delta\rho$.

La quantité n^2 ayant d'ailleurs la valeur fort petite

$$n^2 = 0,0000000053,$$

le produit de n^2 par une quantité de l'ordre de celles qu'on rencontre dans les problèmes terrestres est une quantité toujours assez petite ; j'ai fait cette remarque afin qu'on soit bien convaincu qu'il serait oiseux de vouloir conserver dans les calculs les termes affectés du facteur n^2, au moins toutes les fois qu'on regarde la pesanteur comme constante.

Effets de la force centrifuge composée. — Si nous considérons maintenant un corps en mouvement à la surface de la Terre, il faudra joindre à la force complexe que nous nommons *pesanteur* une nouvelle force dite *centrifuge composée*, dont l'importance croît en raison de la vitesse relative du corps.

Chute des corps dans le vide. — Examinons ce qui va résulter de l'action apparente de cette nouvelle force, sur un corps qu'on laisse tomber à la surface de la Terre, sans lui donner de vitesse initiale. La grandeur de la force centrifuge composée étant proportionnelle à la vitesse relative du mobile, on voit qu'elle est nulle au départ de ce mobile et qu'elle prend ensuite une valeur de plus en plus grande, à mesure que la vitesse relative croît. Au commencement, le mouvement semble donc produit par la résultante de l'attraction de la Terre sur le corps et de la force centrifuge due à la rotation du globe : c'est la force que nous désignons sous le nom de *poids du corps*, et dont la direction est indiquée par le fil à plomb, qui se manifeste seule dans les circonstances que présente le mouvement à son origine. D'après cela, le corps commence à tomber suivant la verticale de son point de départ, et l'accélération g qu'il reçoit tout d'abord dans sa chute apparente est celle qu'une force égale à son

poids lui communiquerait. Ainsi, le poids P est lié à l'accélération g de son mouvement apparent, par la relation

$$P = mg.$$

Cette relation avait été établie tout d'abord dans l'hypothèse de l'immobilité de la Terre. Il était nécessaire de montrer qu'elle est encore vraie lorsqu'on rentre dans la réalité, quoique P ne soit pas la force qui agit réellement sur le corps, et que g ne soit pas l'accélération de son mouvement absolu. Mais il faut observer que, pour qu'il en soit ainsi, on doit prendre pour g l'accélération qui se présente dans les premiers instants de la chute apparente du corps.

Lorsque le corps qui tombe est déjà en mouvement, la force centrifuge composée n'est plus nulle : elle dérange le corps de la verticale suivant laquelle il a commencé à se mouvoir. Pour nous rendre compte de l'effet qu'elle produit et que l'on a pu constater par l'expérience, malgré sa petitesse, nous déterminerons la grandeur et la direction de cette force centrifuge composée, comme si le mouvement apparent du corps était rigoureusement un mouvement rectiligne et uniformément accéléré s'effectuant suivant la verticale menée par son point de départ.

On devra alors, dans les expressions de X'', Y'', Z'', supprimer les termes qui contiennent en facteur $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$, et remplacer approximativement $\frac{dz}{dt}$ par $-gt$. Y'' prend ainsi la valeur positive

$$Y'' = 2mn\sin\lambda . gt,$$

ce qui indique une déviation de la méridienne, dans la direction de l'orient.

Pour calculer cette déviation, il n'y a qu'à intégrer deux fois l'équation de la projection du mouvement sur l'axe des y :

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 2n\sin\lambda . gt,$$

ce qui donne, en déterminant convenablement les arbitraires,

$$(4) \qquad y = \tfrac{1}{3}n\sin\lambda . gt^3.$$

Cette équation, réunie à l'équation

$$(5) \qquad z = z_0 - \tfrac{1}{2}gt^2,$$

fournit une deuxième approximation des lois de la chute des graves.

En désignant par h la hauteur de chute, on a

$$h = \tfrac{1}{2}gt^2;$$

tirant la valeur de t pour la substituer dans l'équation (4), on trouve l'expression de la déviation orientale en fonction de la hauteur de chute

$$(6) \qquad y = \tfrac{2}{3}\sqrt{2}\,\frac{n\sin\lambda}{\sqrt{g}}\,h\sqrt{h}.$$

Appliquons cette formule à une expérience faite par M. Reich dans l'un des puits des mines de Freyberg. L'observation a donné une déviation de $0^m,0283$, pour une hauteur de chute de $158^m,50$, à la latitude de 39 degrés. La formule précédente donnerait

$$y = 0^m,0276.$$

La vérification est donc aussi satisfaisante qu'on peut le désirer.

On peut pousser plus loin l'approximation, en remplaçant, dans l'expression de X″, $\frac{dy}{dt}$ par sa valeur approchée $n\sin\lambda . gt^2$. On a ainsi la troisième équation du mouvement :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2n^2\sin\lambda\cos\lambda . gt^2,$$

qui devient, par une double intégration,

$$(7) \qquad x = -\tfrac{1}{6}n^2\sin\lambda\cos\lambda . gt^4 = -\tfrac{2}{3}\,\frac{n^2\sin\lambda\cos\lambda}{g}\,h^2.$$

Le calcul indique donc une déviation vers le sud. Seulement cette nouvelle déviation est trop petite pour qu'il soit possible de la constater expérimentalement. Avec les données de l'expérience citée plus haut, on trouverait environ un deux-centième de millimètre.

Mouvement des projectiles dans le vide. — Si l'on considère, au contraire, un projectile lancé avec une certaine vitesse initiale, la force centrifuge composée a tout de suite une valeur notable, et les effets ont une importance bien autrement grande, au moins au point de vue théorique.

Ainsi Laplace, dans sa *Mécanique céleste*, donne le résultat suivant. Si l'on suppose une bombe, dirigée verticalement de bas en haut, avec une vitesse de 500 mètres par seconde, en négligeant toutes les influences perturbatrices autres que celles de la rotation de la Terre, il y aura une déviation *occidentale* de $128^{m},9$.

Mouvement du pendule simple. — Un des effets les plus curieux de la force centrifuge composée est celui qu'elle produit sur les oscillations d'un pendule simple, effet qui a été mis en évidence par les expériences de M. Foucault.

Poisson avait annoncé, dans son Mémoire de 1826, que « les oscillations du pendule sont indépendantes de la rotation diurne de la Terre, et les mêmes dans tous les azimuts autour de la verticale, ce qu'il était bon de faire voir, ajoute-t-il, vu le degré de précision que l'on apporte maintenant dans les mesures du pendule à secondes en différents lieux de la Terre. » (*Journal de l'École Polytechnique*, Cahier XVII.)

M. Foucault a démontré, par des expériences faciles, fréquemment renouvelées depuis, que les oscillations du pendule qu'on écarte de sa position d'équilibre, et qu'on abandonne ensuite à lui-même sans vitesse initiale, ne s'exécutent pas dans un plan fixe par rapport à la Terre.

La question générale du mouvement du pendule est très-difficile à traiter. Pour essayer de nous en faire une idée, décomposons la rotation de la Terre en deux, dont l'une ait pour axe la verticale du lieu, l'autre une perpendiculaire, et proposons-nous de déterminer séparément l'effet de ces deux rotations. Or, relativement à la première, le pendule se trouve situé au pôle; il est à l'équateur pour la deuxième.

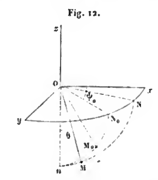
Occupons-nous seulement du premier cas, c'est-à-dire considérons le pendule au pôle. Il est facile de voir que, même dans ce cas simple, et contrairement à une opinion répandue, on ne peut pas toujours considérer les oscillations comme s'effectuant dans un plan tournant en sens inverse de la Terre.

On a alors

$$\lambda = 0.$$

Désignons toujours par θ l'angle d'écart du pendule, et par ψ

Fig. 12.



la longitude comptée à partir d'un plan fixe arbitraire (*fig.* 12). On a

$$X'' = -2mn\frac{dy}{dt},$$

$$Y'' = 2mn\frac{dx}{dt},$$

$$Z'' = 0.$$

Supposons d'abord qu'après avoir écarté le pendule de la verticale on l'abandonne à lui-même sans vitesse initiale apparente.

Supposons la pesanteur constante; désignons par l la longueur du pendule, et conduisons les opérations comme dans le calcul de la page 35, en ayant égard à la force centrifuge composée. Nous ferons seulement, au lieu de $z = l\cos\theta$,

$$z = -l\cos\theta,$$

afin que l'angle θ désigne, selon l'usage, l'écartement du pendule de la verticale.

Cela posé, l'intégrale des forces vives n'éprouve aucune modification par l'introduction de la force centrifuge compo

sée, et nous écrivons l'intégrale

$$(1) \qquad \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \sin^2\theta \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\theta_0),$$

puisque θ' et ψ' sont pris nuls à l'origine du mouvement.

Quant à l'équation des moments des quantités de mouvement et des forces autour de la verticale

$$d.ml^2\sin^2\theta\frac{d\psi}{dt} = x\mathrm{Y} - y\mathrm{X},$$

elle devient, eu égard aux valeurs de X″ et Y″,

$$d.ml^2\sin^2\theta\frac{d\psi}{dt} = d.mn(x^2+y^2) = d.mnl^2\sin^2\theta,$$

ou

$$(2) \qquad d.\sin^2\theta\left(\frac{d\psi}{dt} - n\right) = 0.$$

Intégrant entre les limites, il vient

$$(3) \qquad \sin^2\theta\left(\frac{d\psi}{dt} - n\right) = -n\sin^2\theta_0.$$

Les équations (1) et (3) résolvent le problème que nous nous étions proposé de traiter.

On tire de la dernière de ces équations

$$\frac{d\psi}{dt} = n\left(1 - \frac{\sin^2\theta_0}{\sin^2\theta}\right),$$

et l'on voit qu'il n'est pas exact de dire que le plan vertical qui contient le pendule soit animé d'un mouvement égal et contraire au mouvement de rotation de la Terre, du moins quand il s'agit d'un pendule abandonné à lui-même sans vitesse initiale. La rotation effective $\frac{d\psi}{dt}$ dépend de l'angle d'écart variable θ.

On peut d'ailleurs remarquer que l'intégrale générale de l'équation (2) est

$$\sin^2\theta\left(\frac{d\psi}{dt} - n\right) = \mathrm{C}.$$

Si donc on a, à l'instant initial,

$$\psi'_0 = n$$

et, par conséquent,

$$C = 0,$$

notre intégrale deviendra

$$\frac{d\psi}{dt} - n = 0,$$

et, par suite, les oscillations du pendule s'accompliront bien dans un plan animé d'une vitesse positive égale en valeur absolue à la rotation de la Terre si l'expérience a lieu au pôle, ou au produit de cette rotation par le sinus de la latitude si l'on se trouve en un point quelconque du globe terrestre (*).

Quant aux circonstances du mouvement, elles ne seront pas les mêmes que celles du mouvement ordinaire, parce qu'il faudra, dans l'équation (1), remplacer $\frac{d\psi}{dt}$ par n et avoir égard à ce qu'on ne suppose plus nulle la vitesse initiale ; on trouve ainsi

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 &= \frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\theta_0) + n^2(\cos^2\theta - \cos^2\theta_0)\\ &= (\cos\theta - \cos\theta_0)\left[\frac{2g}{l} + n^2(\cos\theta + \cos\theta_0)\right].\end{aligned}$$

Le temps d'une petite oscillation n'est pas altéré d'une manière sensible, comme il est facile de s'en assurer par le calcul.

Il faudrait encore, pour compléter la théorie du pendule, examiner l'effet de la deuxième composante de la rotation terrestre, relativement à laquelle le pendule doit être considéré comme situé à l'équateur. Nous ferons seulement remarquer que l'influence de la force centrifuge composée doit nécessai-

(*) Ce calcul très-simple, qui suffit pour l'objet de cet Ouvrage, est tiré d'un Mémoire lu par le général Poncelet à l'Académie des Sciences en septembre 1860.

rement se borner à la production de perturbations périodiques dans le mouvement de rotation dû à la composante verticale. En effet, la force centrifuge composée agit dans un sens différent, selon que le mobile se trouve d'un côté ou de l'autre de l'équateur : les termes qu'elle introduit changent donc périodiquement de signe à la fin de chaque demi-oscillation simple.

Influence de la translation de la Terre. — Dans tout ce que nous venons de dire, nous avons négligé le mouvement de la translation de la Terre autour du Soleil. Il résulte de ce mouvement une nouvelle force fictive, égale et contraire à la *force d'entraînement*, c'est-à-dire une force égale et contraire à celle qui donnerait au mobile supposé libre un mouvement précisément égal à celui du centre de la Terre. Mais, en même temps qu'on tient compte du mouvement de la Terre autour du Soleil, on doit se préoccuper également de l'attraction que le Soleil exerce sur le corps dont on veut étudier le mouvement par rapport à la Terre.

Ces deux nouvelles forces sont à peu près égales et contraires l'une à l'autre, à cause de la petitesse du rayon de la Terre relativement à la distance de la Terre au Soleil ; leur résultante, qui est extrêmement petite, change de grandeur et de direction d'une heure à l'autre dans la journée, par suite du changement de position du corps par rapport au Soleil. Elle doit donc être regardée comme une force perturbatrice qui détermine une variation périodique, tant dans la grandeur du poids du corps que dans la direction du fil à plomb ou de la verticale. Ce changement périodique de la position du fil à plomb pourra difficilement s'observer directement, parce qu'il est trop faible, mais il devient sensible par les oscillations de la surface de la mer, qui en sont la conséquence naturelle.

Enfin la Lune concourt aussi pour sa part à produire les effets de la force complexe de la pesanteur (*).

La résultante de l'attraction de la Lune sur un corps terrestre et d'une force capable de communiquer à ce corps une accélération égale et contraire à celle que la Lune donne au centre

(*) Cette analyse, aussi claire que complète, des forces qui influent à des degrés divers sur les mouvements des corps à la surface de la Terre, est extraite du *Traité de Mécanique rationnelle* de M. Delaunay.



de la Terre constitue une nouvelle force perturbatrice qui se combine avec la précédente pour produire le changement périodique de direction de la verticale, auquel est dû le phénomène des marées. Cette dernière force perturbatrice est même plus grande que la première, parce que la Lune est beaucoup plus rapprochée de la Terre que le Soleil, et c'est pour cela que le phénomène des marées se règle surtout sur le mouvement apparent de la Lune, et non sur celui du Soleil.

CHAPITRE II.

MOUVEMENT DES SYSTÈMES MATÉRIELS QUELCONQUES.

§ VI. — Principe ou théorème de d'Alembert.

Par les règles expliquées dans le Chapitre qui précède, on peut déterminer les lois du mouvement d'un corps sollicité par des forces quelconques, libre ou gêné par des obstacles fixes, pourvu que ce corps puisse être géométriquement regardé comme un point, c'est-à-dire pourvu qu'il n'y ait pas à se préoccuper des mouvements relatifs de ses diverses parties.

Mais lorsqu'un certain nombre de corps pareils (*points matériels*) sont joints et liés ensemble de manière qu'ils ne puissent obéir librement aux forces qui les sollicitent directement, ces corps exercent nécessairement les uns sur les autres des efforts inconnus, *tensions* ou *pressions*, que nous confondons sous le nom de *forces intérieures*. Or, ces forces influent sur le mouvement produit, au même titre et suivant les mêmes lois que les forces extérieures, et réciproquement elles dépendent du mouvement qu'elles modifient.

La détermination du mouvement d'un corps de dimensions finies, même quand on peut assimiler ce corps à un solide invariable, est donc d'un ordre tout différent que celle du mouvement d'un point soumis à des forces connues; et il y avait là pour la Mécanique, après la découverte de Galilée, un pas nouveau à faire, un important *desideratum* à combler.

Le premier problème de ce genre dont il soit fait mention est celui du *centre d'oscillation*. D'après les lettres de Descartes, le P. Mersenne avait proposé aux géomètres de déterminer la grandeur que doit avoir un corps de figure quelconque, pour qu'étant suspendu par un point il fasse ses oscillations dans le même temps qu'un fil de longueur donnée, chargé d'un seul poids à son extrémité (*pendule simple*).

Nous ne nous arrêterons pas à parler des autres problèmes de Dynamique, qui ont exercé, après celui du centre d'oscillation, la sagacité des géomètres des deux derniers siècles, avant que l'art de traiter ces problèmes fût réduit à des règles fixes.

Pour résoudre ces questions, que Bernoulli, Clairaut, Euler se proposaient entre eux, on faisait usage de divers principes, parmi lesquels se distingue surtout celui des forces vives, dû à Huygens. Ce principe si simple et si général a en même temps un caractère d'individualité séduisant, car il a été trouvé dès le début par son inventeur, et nous l'avons exposé dans cet Ouvrage avant d'avoir fait la Dynamique proprement dite; mais il a l'inconvénient de ne donner qu'une seule équation. Il suffit, nous l'avons vu, pour la solution des questions de mouvement dans le cas des systèmes à liaison complète, c'est-à-dire de la presque totalité des *machines*. Dans le cas général, son utilité est beaucoup restreinte. Nous avons vu d'ailleurs que l'équation unique fournie par le principe des forces vives a une grande importance au point de vue pratique, puisqu'elle fait connaître le travail développé par les forces, indépendamment des circonstances accessoires du mouvement.

Le *Traité de Dynamique* de d'Alembert, qui parut en 1743, mit fin à ces espèces de défis, en offrant une méthode directe et générale pour résoudre, ou du moins pour mettre en équation tous les problèmes de Dynamique que l'on peut imaginer. Cette méthode réduit toutes les lois du mouvement des corps à celles de leur équilibre, et ramène ainsi la Dynamique à la Statique. Le principe de d'Alembert (*) ne fournit pas immédiatement les équations nécessaires pour la solution des problèmes de Dynamique, mais il apprend à les déduire des conditions de l'équilibre.

Or Lagrange a réduit toute la Statique à une formule générale qui donne les lois de l'équilibre de tous les systèmes de

(*) Il est inutile de répéter que nous n'avons pas ici de nouveau principe proprement dit. Le principe de d'Alembert est pour nous un théorème comme celui des vitesses virtuelles; cependant on applique malgré soi le nom de *principes* à ces propositions si capitales, qu'on ne peut se résoudre à les confondre sous une appellation unique avec tous les théorèmes particuliers.

corps tirés par tant de forces qu'on voudra. On pourra donc aussi réduire à une formule générale toute la Dynamique, ainsi que nous allons le voir.

Considérons chaque point m de notre système matériel comme soumis à l'action de la force extérieure, qui lui est directement appliquée, et de la force intérieure, qui résulte des actions exercées sur lui par les autres points du système; on pourra regarder ce point comme isolé et lui appliquer la théorie du mouvement d'un point libre. L'accélération totale du mouvement du point m a la même direction que la résultante des forces qui agissent sur lui, et la grandeur de cette accélération est telle, qu'en la multipliant par la masse du point, on obtient un produit égal à la résultante dont il vient d'être question.

Or, si l'on se reporte à la définition de la force d'inertie d'un point, on voit que, si l'on ajoutait la force d'inertie du point m aux forces de toute nature qui lui sont appliquées, ce point se trouverait en équilibre, puisque la force d'inertie, que l'on joint aux forces réelles, est égale et directement opposée à la résultante de ces forces réelles.

Ce premier point étant bien établi, faisons pour chaque point matériel du système ce que nous venons de faire pour l'un d'eux, c'est-à-dire introduisons la force d'inertie de chaque point, et considérons toutes ces forces fictives comme appliquées chacune au point correspondant, en même temps que la force extérieure F, et la force intérieure provenant des liaisons mutuelles de nos divers points; il est clair que nous aurons constitué ainsi un ensemble de forces en équilibre.

Cet équilibre a d'ailleurs lieu, quelle que soit la nature du système matériel dont nous nous occupons, puisque toutes nos forces sont distribuées par groupe de trois, lesquelles se font séparément équilibre et sont appliquées à un même point matériel. Ainsi :

Théorème. — *Il y a équilibre à chaque instant entre les forces extérieures directement appliquées aux divers points d'un système quelconque en mouvement, les forces d'inertie de ces points et les forces intérieures résultant des liaisons du système matériel.*

Ce qu'on peut énoncer aussi :

Étant donné un système quelconque en mouvement, il y a équilibre, en vertu de la constitution du système, entre les forces réellement agissantes (forces extérieures) *et les forces d'inertie des divers points.*

Cet énoncé cesserait d'être exact, si l'on supprimait les mots : *en vertu de la constitution du système.*

L'équilibre de nos trois espèces de forces s'exprime par l'équation des vitesses virtuelles, qui prend la forme

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} \sum\Big[\Big(\mathrm{X}_i+\mathrm{x}_i-m_i\frac{d^2x_i}{dt^2}\Big)\delta x_i+\Big(\mathrm{Y}_i+\mathrm{y}_i-m_i\frac{d^2y_i}{dt^2}\Big)\delta y_i \\ +\Big(\mathrm{Z}_i+\mathrm{z}_i-m_i\frac{d^2z_i}{dt^2}\Big)\delta z_i\Big]=0. \end{aligned} \right.$$

Cette équation a lieu, quels que soient les déplacements représentés par δx_i, δy_i, δz_i; puisqu'il résulte de notre analyse que les coefficients de ces quantités sont tous séparément nuls.

Mais nous avons vu en Statique que, toutes les fois qu'on assignait, aux divers points d'un système quelconque, des déplacements virtuels compatibles avec les liaisons de ce système, la *somme* des travaux virtuels de toutes les forces introduites pour tenir compte de ces liaisons était identiquement nulle, comme composée d'une série de quantités égales deux à deux et de signes contraires. Nous pouvons donc écrire

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} \sum\Big[\Big(\mathrm{X}_i-m_i\frac{d^2x_i}{dt^2}\Big)\delta x_i+\Big(\mathrm{Y}_i-m_i\frac{d^2y_i}{dt^2}\Big)\delta y_i \\ +\Big(\mathrm{Z}_i-m_i\frac{d^2z_i}{dt^2}\Big)\delta z_i\Big]=0, \end{aligned} \right.$$

à la condition de ne pas oublier que, dans cette nouvelle forme de l'équation, les déplacements δx_i, δy_i, δz_i ne sont plus quelconques, mais essentiellement compatibles avec les liaisons du système.

Tel est le fameux théorème de d'Alembert, au moyen duquel toute question de mouvement se ramène immédiatement à une question d'équilibre.

Quand il s'agit d'un point matériel libre ou d'un système de points matériels isolés pouvant se mouvoir les uns par rapport aux autres d'une manière quelconque sous l'action des forces qui leur sont directement appliquées, le théorème de d'Alembert n'est d'aucune utilité. En effet, que l'on veuille appliquer ce théorème ou poser à la manière ordinaire les équations du mouvement, c'est absolument la même chose. Soit m_i la masse d'un des points; les déplacements δx_i, δy_i, δz_i étant tous arbitraires, l'équation (2) ne peut avoir lieu qu'autant que les coefficients des indéterminées sont tous nuls séparément.

On doit donc avoir dans ce cas

$$X_i - m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = 0,$$

$$Y_i - m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = 0,$$

$$Z_i - m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = 0;$$

or ces équations sont précisément les équations ordinaires du mouvement.

Mais quand on imagine des liaisons quelconques, un certain nombre de coordonnées des points du système ne sont plus arbitraires, et nous allons voir que le théorème de d'Alembert donne toujours juste autant d'équations qu'il en faut pour déterminer celles qui restent, différant par là du principe des forces vives, qui ne donne jamais qu'une seule équation, quel que soit le système auquel on l'applique.

Supposons qu'il y ait n points dans le système, et k équations de condition entre les coordonnées de ces points. Il n'y aura que $3n - k$ coordonnées arbitraires, et, par suite, il faudra trouver $3n - k$ équations. Soient

$$\varphi_1(x_i, y_i, z_i, t) = 0,$$

$$\varphi_2(x_i, y_i, z_i, t) = 0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\varphi_k(x_i, y_i, z_i, t) = 0$$

les équations de condition. Pour que le déplacement du système soit compatible avec les liaisons existantes au moment

considéré, il faut que les variations δx_i, δy_i, δz_i soient telles qu'en remplaçant x_i, y_i, z_i par $x_i + \delta x_i$, $y_i + \delta y_i$, $z_i + \delta z_i$, et laissant t constant dans les équations précédentes, ces équations soient encore vérifiées. Or ceci exige qu'on ait

$$\sum\left(\frac{d\varphi_1}{dx_i}\delta x_i + \frac{d\varphi_1}{dy_i}\delta y_i + \frac{d\varphi_1}{dz_i}\delta z_i\right) = 0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\sum\left(\frac{d\varphi_k}{dx_i}\delta x_i + \frac{d\varphi_k}{dy_i}\delta y_i + \frac{d\varphi_k}{dz_i}dz_i\right) = 0,$$

le signe Σ s'étendant à tous les points matériels du système.

On a ainsi k équations, desquelles on peut tirer les valeurs de k variations en fonction des autres. En substituant ces valeurs dans l'équation générale, il ne reste plus que $3n - k$ coefficients à annuler, ce qui donne précisément les $3n - k$ équations dont on a besoin.

Lagrange a présenté cette élimination d'une manière tout à fait générale et extrêmement élégante, dont l'exposition complète est en dehors du plan de cet ouvrage. Supposons que l'on ait profité des équations de liaison pour exprimer les $3n$ coordonnées inconnues en fonction de $3n - k$ variables quelconques

$$q_1, q_2, \dots, q_{3n-k}.$$

Les quantités q sont dès lors absolument indépendantes, comme les coordonnées d'un système de points libres, et les formules de Lagrange donnent immédiatement les équations différentielles auxquelles ces nouvelles variables doivent satisfaire.

Les équations de Lagrange, transformées par Poisson et par M. Hamilton, ont fourni à un grand nombre de géomètres la matière de travaux fort intéressants, parmi lesquels je me bornerai à mentionner les nombreuses publications de Jacobi. Ces travaux doivent être considérés comme purement analytiques; ils ont présenté sous un jour tout à fait nouveau la théorie des équations aux différences partielles du premier ordre: nouvel exemple des liens d'utilité réciproque qui existent entre la Mécanique et la haute Analyse.

Application du principe de d'Alembert à la détermination des charges dynamiques des appuis et supports.

Nous avons appris, en Statique, à déterminer les efforts qui s'exercent sur les appuis d'une machine en équilibre, ainsi que sur les diverses pièces de la machine elle-même. Ces efforts éprouvent des modifications considérables quand on considère la machine dans l'état de mouvement, surtout dans le cas de vitesses un peu notables; et la détermination de leurs valeurs constitue aujourd'hui une des parties les plus importantes de la Mécanique appliquée.

Or le principe de d'Alembert nous donne le droit de considérer un système quelconque en mouvement comme s'il était en équilibre, pourvu qu'on ajoute aux forces données et aux réactions inconnues les forces d'inertie des divers points. Les équations de la Statique subsisteront donc, à la condition d'y faire figurer les forces d'inertie. Ce sont les termes dépendant de ces forces qui font la différence des tensions et réactions statiques aux tensions et réactions dynamiques.

Supposons, par exemple, une corde soutenant un poids P. Dans le cas de l'équilibre, on a, pour déterminer la tension T de la corde, l'équation

$$T = P = mg.$$

Mais si le poids est animé d'un mouvement vers le haut, dont l'accélération soit $\frac{d^2z}{dt^2}$, l'équation précédente ne subsiste plus : elle est remplacée par la relation

$$T = mg + m\frac{d^2z}{dt^2} = m\left(g + \frac{d^2z}{dt^2}\right).$$

La tension est donc plus grande que dans l'équilibre.

Si au contraire $\frac{d^2z}{dt^2}$ est négatif, la tension devient inférieure au poids P; elle serait nulle si $\frac{d^2z}{dt^2} = -g$; ce qui doit être en

effet, parce que le corps suspendu prend alors son mouvement naturel. La tension deviendrait même négative si le corps descendait plus vite que sous la seule action de la pesanteur.

Nous verrons plus tard d'importantes applications de ces considérations, quand nous étudierons la dynamique spéciale des corps solides. Mais, auparavant, nous devons continuer l'exposition des propriétés plus générales qui s'appliquent au mouvement d'un système quelconque.

Nous arriverons à des théorèmes d'une haute importance, relatifs au mouvement d'un système matériel quelconque, en combinant les théorèmes généraux trouvés dans la dynamique du point avec le principe de l'action et de la réaction.

§ VII. — Mouvement du centre de gravité d'un système quelconque.

Dans ce que nous appelons *un système matériel quelconque*, c'est-à-dire dans un ensemble de points matériels indépendants ou liés entre eux, immobiles ou animés de mouvements arbitraires, il existe à chaque instant un point géométrique, qui jouit de propriétés toutes particulières.

Les coordonnées x_1, y_1, z_1 de ce point, qu'Euler appelle *centre d'inertie*, et qui est plus généralement connu sous la dénomination fort impropre de *centre de gravité* (*), sont déterminées par les relations suivantes, qui constituent la véritable définition du centre de gravité :

$$(1) \qquad \begin{cases} Mx_1 = \Sigma mx, \\ My_1 = \Sigma my, \\ Mz_1 = \Sigma mz, \end{cases}$$

M désignant la masse totale du système, ou la somme Σm des masses partielles.

(*) *Voir* la deuxième Partie de cet Ouvrage, *Statique*, p. 100.

Différentions ces équations par rapport au temps, il vient

$$(2)\qquad \begin{cases} M\dfrac{dx_1}{dt} = \Sigma m \dfrac{dx}{dt} = \Sigma m v_x, \\ M\dfrac{dy_1}{dt} = \Sigma m \dfrac{dy}{dt} = \Sigma m v_y, \\ M\dfrac{dz_1}{dt} = \Sigma m \dfrac{dz}{dt} = \Sigma m v_z. \end{cases}$$

Ces relations définissent la *vitesse* du centre de gravité. Une deuxième différentiation nous fera connaître l'*accélération* de ce même point (*) :

$$(3)\qquad \begin{cases} M\dfrac{d^2x_1}{dt^2} = \Sigma m \dfrac{d^2x}{dt^2}, \\ M\dfrac{d^2y_1}{dt^2} = \Sigma m \dfrac{d^2y}{dt^2}, \\ M\dfrac{d^2z_1}{dt^2} = \Sigma m \dfrac{d^2z}{dt^2}. \end{cases}$$

Remplaçons les quantités qui figurent sous le signe Σ par leurs valeurs tirées des équations du mouvement

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X + x,$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y + y,$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z + z;$$

les termes qui représentent les projections des forces intérieures disparaissent dans la sommation, et les équations (3)

(*) Nous emploierons les expressions de *vitesse* et d'*accélération* aussi bien quand le centre de gravité est une pure fiction géométrique que lorsque, comme dans un solide invariable, les équations (1) définissent un point bien déterminé du corps, point dont la position dans l'intérieur de celui-ci reste la même, quel que soit le mouvement du corps tout entier.

deviennent

$$(4)\qquad \begin{cases} M\dfrac{d^2x_1}{dt^2} = \Sigma X, \\ M\dfrac{d^2y_1}{dt^2} = \Sigma Y, \\ M\dfrac{d^2z_1}{dt^2} = \Sigma Z. \end{cases}$$

Les équations (4) sont celles du mouvement d'un point de masse M, sollicité par une force dont les projections sur trois axes rectangulaires sont respectivement égales aux sommes des projections de toutes les forces du système. Or cette force n'est autre chose que celle à laquelle nous avons donné le nom de *résultante de translation* des forces dont les composantes sont réunies sous le signe Σ. Donc :

Théorème. — *Le centre de gravité d'un système de corps quelconque se meut comme un point matériel dont la masse serait égale à la masse totale des corps considérés, et auquel serait appliquée la résultante de translation des forces données* (*).

Il ne faut pas s'exagérer l'importance de ce théorème dans le cas général. En effet, il arrivera bien rarement qu'on puisse déterminer directement par les équations (4) le mouvement du centre de gravité, indépendamment des mouvements individuels des points matériels du système. Il faudrait, pour cela, que les projections de la résultante de translation dépendissent uniquement du temps t et des coordonnées x_1, y_1, z_1 ; or il est évident qu'en général les quantités ΣX, ΣY, ΣZ seront des fonctions des coordonnées de tous les points donnés, et l'intégration isolée du groupe (4) ne sera pas possible.

Mais une conséquence bien importante de notre théorème

(*) On voit que la notion du point matériel n'est pas une pure abstraction, utile seulement dans les raisonnements destinés à établir les théorèmes qui s'appliquent aux corps de la nature. En effet, un corps de dimensions quelconques peut toujours être assimilé (au moins théoriquement) à un point matériel dont les coordonnées seraient celles de son centre de gravité; et tous les théorèmes relatifs au mouvement d'un point s'appliquent au corps ainsi condensé autour de ce centre de gravité.

est la suivante : il est évident que les forces intérieures, qui sont deux à deux égales et directement opposées, se détruisent dès qu'on les transporte en un même point d'application. Il suit de là que le mouvement du centre de gravité ne dépend nullement des forces intérieures, et, par conséquent, qu'il n'est influencé en rien par les changements qui peuvent se produire dans la constitution physique du système, des chocs, des explosions, des ruptures de liens, etc., tant que ces phénomènes se passent exclusivement entre des corps que l'on considère comme faisant partie du système étudié.

Principe de la conservation du mouvement du centre de gravité.

Cette proposition importante est connue dans la science sous le nom de *principe de la conservation du mouvement du centre de gravité.* En effet, le centre de gravité conserve son mouvement, quelles que soient les perturbations qui affectent les mouvements individuels des diverses parties du système, par suite de modifications survenues dans les forces intérieures, et cela jusqu'à ce qu'une nouvelle force extérieure intervienne.

En particulier, si l'on considère un système qui n'est soumis à l'action d'aucune force extérieure, le centre de gravité de ce système sera forcément en repos, ou animé d'un mouvement rectiligne et uniforme (*). Ce point jouit donc de la propriété de l'*inertie*, c'est-à-dire qu'il ne peut être tiré du repos que par l'action d'une cause *extérieure*. Quant aux diverses parties d'un corps en repos, elles peuvent se mettre en mouvement sans l'intervention d'aucune cause située en dehors du corps; seulement on remarquera toujours ces deux choses : 1° le mouvement de chaque partie individuellement sera dû à une cause extérieure à cette partie; 2° tous les mou-

(*) Notre système planétaire, par exemple, étant extrêmement éloigné des autres corps célestes, on peut regarder les actions que ses diverses parties éprouvent de la part des étoiles comme insensibles. Dès lors ce système n'est soumis qu'à des forces intérieures, et par conséquent son centre de gravité doit être immobile ou animé d'un mouvement rectiligne et uniforme.

vements des divers fragments seront nécessairement combinés de telle sorte que le centre de gravité de l'ensemble ne sorte pas de sa position primitive.

Il n'est pas nécessaire, pour que le mouvement du centre de gravité soit nul ou rectiligne uniforme, que les forces extérieures soient nulles : il suffit que la résultante de translation soit nulle, c'est-à-dire que toutes ces forces soient équivalentes à un couple situé dans un plan quelconque.

Réciproquement, considérons un corps soumis à des efforts très-variés, et dont les diverses parties soient animées de mouvements quelconques, par exemple un navire, une locomotive, une charrue, etc.; du moment que le centre de gravité de ce corps se meut uniformément en ligne droite, nous pouvons affirmer que la résultante de translation de toutes les forces appliquées à ce corps est nulle, ou, si l'on veut, que toutes les résistances, transportées au centre de gravité, ont une résultante égale et contraire à celle des efforts moteurs.

Le principe de la conservation du mouvement du centre de gravité nous donne la clef d'un grand nombre de phénomènes de l'ordre le plus varié. Nous allons en citer quelques exemples.

Recul des bouches à feu. — Un canon avec son projectile et sa charge de poudre constitue un système immobile. Or, l'explosion de la poudre développant seulement des forces intérieures, il résulte de ce qui précède que le canon et le boulet prennent simultanément des mouvements dirigés en sens contraires l'un de l'autre, afin que le centre de gravité de l'ensemble reste à la place qu'il occupait avant l'inflammation. S'il était permis de négliger la masse de la poudre, ou des matières dans lesquelles elle se transforme, on pourrait dire que le canon et le boulet prennent, au moment de l'explosion, des vitesses inversement proportionnelles à leurs masses. Mais les choses ne se passent pas tout à fait ainsi, à cause de la masse de la poudre, qui n'est pas négligeable par rapport à celle du boulet : en réalité, le recul de la pièce s'effectue avec une vitesse un peu plus grande que celle qu'on trouverait par la règle précédente.

Ascension des fusées. — L'ascension des fusées est un phénomène de recul tout à fait analogue à celui qui vient de nous

occuper. L'inflammation progressive de la poudre qui entre dans la composition d'une fusée projette en dehors des quantités de matières de plus en plus grandes, par un orifice pratiqué à la partie inférieure du corps de la fusée; celui-ci doit donc reculer, c'est-à-dire se mettre en mouvement de bas en haut. L'action de la pesanteur est, à dire vrai, une cause externe qui doit influer sur le phénomène; mais elle ne fait que diminuer la vitesse de la fusée, en faisant équilibre à une partie de la force verticale qui produit le mouvement de bas en haut.

Quand une bombe fait explosion avant d'être tombée sur le sol, le centre de gravité des divers éclats continue à parcourir la parabole suivant laquelle se mouvait le centre de gravité de la bombe entière. Ce n'est que lorsqu'un des fragments vient à rencontrer un corps étranger que le mouvement du centre de gravité de l'ensemble se modifie, parce que la réaction éprouvée par ce fragment est une nouvelle force extérieure qui vient contribuer avec la pesanteur à la production de ce mouvement. Il est clair que ceci n'est vrai qu'approximativement, quand la bombe se meut dans l'air atmosphérique, en raison de la résistance que l'air oppose au mouvement, tant de la bombe que de ses éclats : en effet, cette résistance est une force extérieure, elle influe, par conséquent, sur le mouvement du centre de gravité.

Des phénomènes analogues ont dû se passer lorsque, suivant une hypothèse assez généralement admise, la planète située entre Mars et Jupiter s'est brisée, pour nous laisser à sa place les nombreux astéroïdes qui peuplent cette région de notre système solaire. Le centre de gravité de tous les éclats a dû conserver son mouvement elliptique. Seulement, tous les débris subissant l'influence des planètes voisines, le mouvement du centre de gravité n'a pas tardé à se trouver plus ou moins altéré.

Marche de l'homme et des animaux. — Les êtres animés eux-mêmes sont soumis, quant à leur partie matérielle, aux lois qui régissent tout ce qui est matière, et en particulier à la loi de la conservation du mouvement du centre de gravité.

Considérons un homme isolé au milieu de l'espace : il peut faire exécuter un grand nombre de mouvements aux diverses parties de son corps, et nous ne savons absolument rien du

mécanisme mystérieux par lequel la volonté, principe immatériel, arrive à mettre en mouvement les divers organes du corps auquel elle est liée. Mais ce que nous savons, c'est que tous ces organes constituent un système matériel et que, s'il n'y a pas de forces extérieures, le centre de gravité de ce système doit être à l'état de repos ou à celui de mouvement rectiligne et uniforme. C'est là un point sur lequel la volonté n'a aucune prise, une règle à laquelle se soumettent nécessairement les mouvements de chacun des organes. La présence de l'air atmosphérique modifie d'ailleurs ces résultats, car la résistance de ce fluide pourrait, à la rigueur, être mise en jeu par des mouvements analogues à ceux de la natation, de manière à déplacer le centre de gravité.

Étudions maintenant ce qui se passe (*) « quand un homme, debout sur le sol et primitivement immobile, commence à marcher devant lui, et fait ainsi passer son centre de gravité de l'état de repos à l'état de mouvement. Pendant que cet homme est en repos, il est soumis à des forces extérieures qui sont, d'une part, les actions de la pesanteur sur toutes les molécules de son corps, et, d'autre part, les pressions qu'il éprouve de la part du sol, aux différents points par lesquels il le touche : ces forces extérieures se font équilibre. Lorsque l'homme veut commencer à marcher et qu'il porte une jambe en avant, il ne développe que des forces intérieures qui ne peuvent pas déplacer son centre de gravité; aussi l'autre jambe tend-elle à reculer, ce qu'elle ferait si rien ne s'y opposait, de sorte que le centre de gravité du corps tout entier n'avancerait pas. Mais la seconde jambe ne peut reculer qu'en glissant sur la surface du sol, et sa tendance au glissement développe un frottement qui s'y oppose, au moins jusqu'à une certaine limite : c'est ce frottement, cette composante horizontale de la réaction du sol, qui détermine le mouvement du centre de gravité. Tout le monde sait que, lorsqu'on est sur un sol glissant, c'est-à-dire sur un sol pour lequel le coefficient du frottement est faible, sur de la glace par exemple, et qu'on porte une jambe en avant pour commencer à marcher, l'autre jambe glisse en arrière, de sorte qu'on court le risque de tomber si l'on n'y

(*) DELAUNAY, *Traité de Mécanique rationnelle*. Citation libre.

prend garde. Cet effet bien connu confirme l'explication que nous venons de donner. »

§ VIII. — Théorèmes relatifs aux quantités de mouvement.

Étant donné un système matériel quelconque en mouvement, le principe de d'Alembert nous apprend que les forces réelles qui sollicitent les divers points matériels considérés, jointes aux forces fictives que nous avons appelées *forces d'inertie,* constituent un ensemble en équilibre sur le système qu'on étudie; et nous avons démontré que les équations qui expriment cet équilibre fictif sont toujours en nombre rigoureusement suffisant pour déterminer toutes les circonstances du mouvement.

Parmi ces équations, dont le nombre et la forme varient à l'infini, suivant la constitution physique du système et les liaisons qui existent entre ses diverses parties, nous savons qu'il y en a toujours *six*, et pas plus, qui sont générales, c'est-à-dire qui s'appliquent à tous les systèmes matériels imaginables, parce qu'elles sont indépendantes des tensions ou forces intérieures, variables avec les conditions imposées au corps dont on étudie le mouvement.

On obtient ces six équations générales en écrivant que la somme des projections sur un axe quelconque des forces autres que les forces intérieures est nulle, et que la somme des moments de ces mêmes forces autour d'un axe quelconque est également nulle.

Nous prendrons pour type des équations de projections celle qui se rapporte à l'axe Ox:

$$(1) \qquad \Sigma F_x - \sum m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0;$$

et pour type des équations de moments, celle qui est relative à l'axe Oz:

$$(2) \qquad \Sigma \mathfrak{M}_z F - \sum m \left(x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} \right) = 0.$$

En multipliant par dt les deux membres de chacune des équations (1) et (2), et indiquant l'intégration entre deux li-

mites quelconques t_0 et t, nous aurons des relations entre les projections et les moments des impulsions des forces extérieures, d'une part, et des quantités de mouvement des divers points du système, d'autre part.

On tire de l'équation (1)

$$(3) \qquad \Sigma m v_x - \Sigma m v_{0,x} = \Sigma \int_{t_0}^{t} F_x dt;$$

quant à l'équation (2), si l'on remarque qu'on a

$$\int m \left(x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} \right) dt = m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = \mathfrak{M}_z mv,$$

elle fournira

$$(4) \qquad \Sigma \mathfrak{M}_z m v - \Sigma \mathfrak{M}_z m v_0 = \Sigma \int_{t_0}^{t} \mathfrak{M}_z F dt.$$

Les relations (3) et (4) sont indépendantes des forces intérieures : énoncées en langage ordinaire, elles nous donneront deux théorèmes qui seront l'extension aux systèmes quelconques des théorèmes analogues relatifs à la dynamique du point matériel, et il est clair qu'on les aurait obtenues en ajoutant, membre à membre, les équations qui résultent de l'application de ces théorèmes à chacun des points matériels du système, et remarquant que les forces intérieures disparaissent dans la somme. La méthode précédente a l'avantage de montrer que les six équations fournies par ces deux théorèmes sont les seules qui soient toujours indépendantes des forces intérieures, quels que soient les systèmes auxquels on en fasse l'application.

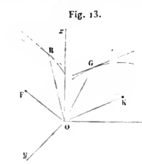
Les quantités de mouvement et les impulsions élémentaires sont des grandeurs géométriques, comme les vitesses et les forces auxquelles elles sont respectivement proportionnelles : or les propriétés établies en Statique, relativement aux forces appliquées à un solide invariable, se rapportent en réalité à des droites disposées d'une manière quelconque dans l'espace, pourvu que, sur chacune de ces droites, on ait porté une certaine longueur, à laquelle soit affecté un sens parfaitement déterminé.

Cela posé, si l'on considère une origine fixe quelconque, et qu'on construise, relativement à cette origine (*fig.* 13) :

1° La résultante de translation OF, et l'axe OK du couple résultant des forces extérieures;

2° Les droites analogues OR et OG, qui correspondent aux quantités de mouvement des divers points du système, traitées absolument comme les lignes qui représentent les forces (*).

Fig. 13.



On pourra donner un énoncé géométrique élégant des équations telles que (3) et (4).

Soient X, Y, Z; L, M, N les projections sur les trois axes de la résultante OF et de l'axe OK : les sommes Σmv_x, Σmv_y ne sont autre chose que les projections de la ligne OR, résultante de translation des quantités de mouvement. Si donc on applique les équations telles que (3) à un élément de temps infiniment petit, et qu'on divise les deux membres par cet élément dt, on aura

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dR_x}{dt} &= X,\\ \frac{dR_y}{dt} &= Y,\\ \frac{dR_z}{dt} &= Z.\end{aligned}\right.$$

(*) Quand les divers points d'un système au repos sont soumis brusquement à des forces très-grandes, qui leur communiquent en un temps très-court des quantités de mouvement finies, on voit, en faisant $v = 0$ dans les équations (3) et (4), que :

Théorème. — *Les quantités de mouvement finies acquises par tous les points du système, pendant un temps très-court, forment un système de droites équivalent aux percussions subies par les points* (m).

Ces équations veulent dire que la vitesse du point R est représentée en grandeur et en direction par la force OF. Comme OR représente précisément la quantité de mouvement de la masse entière, concentrée au centre de gravité (*), le résultat qui précède est une conséquence évidente du théorème en vertu duquel OF est le produit de la masse M par l'accélération totale du centre de gravité et de la définition donnée en Cinématique de l'accélération totale. Le théorème de la conservation du mouvement du centre de gravité est donc l'expression la plus simple des équations relatives aux projections des quantités de mouvement et des impulsions.

Théorèmes relatifs aux moments des quantités de mouvement et des impulsions.

D'après les règles de la composition des couples, la somme des moments des quantités de mouvement des points (m), par rapport à un axe quelconque, est la projection, sur cet axe, de la droite OG; on a donc

$$(6)\qquad \left\{\begin{array}{l} \Sigma\,\mathfrak{M}_x\, m v = G_x, \\ \Sigma\,\mathfrak{M}_y\, m v = G_y, \\ \Sigma\,\mathfrak{M}_z\, m v = G_z. \end{array}\right.$$

En introduisant ces valeurs dans les équations telles que (4) et différentiant par rapport au temps, il vient

$$(7)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{dG_x}{dt} = L + K_x, \\ \dfrac{dG_y}{dt} = M + K_y, \\ \dfrac{dG_z}{dt} = N + K_z; \end{array}\right.$$

(*) On conclut de cette remarque évidente que :

THÉORÈME. — *La vitesse du centre de gravité d'un système quelconque est parallèle à la résultante de translation des quantités de mouvement des divers points du système.*

ce qui signifie que la droite OK représente en grandeur et en direction la vitesse dont est animé le point G. Donc :

THÉORÈME I. — *Si l'on considère, pour un point fixe quelconque, l'axe du couple résultant des quantités de mouvement des divers points d'un système matériel donné, et l'axe du couple résultant des forces qui agissent sur le système, ce dernier représente en grandeur et en direction la vitesse de l'extrémité du premier.*

Comme les forces extérieures sont *équivalentes* aux forces d'inertie prises en sens contraire, on peut énoncer ce résultat sous la forme suivante :

THÉORÈME II. — *L'axe du couple résultant des forces d'inertie d'un système matériel, transportées en un point fixe quelconque, est égal et directement opposé à la vitesse de l'extrémité de l'axe du couple résultant des quantités de mouvement, transportées au même point.*

Ainsi que nous l'avons fait dans le cas d'un point libre, cherchons les cas qui présentent un intérêt spécial, par suite de certaines conditions auxquelles satisfont les forces du système.

Théorème de la conservation des aires.

Le premier cas que nous étudierons est celui où la somme des moments des forces extérieures autour d'un certain axe est constamment nulle. Alors, si l'on prend cet axe pour axe des z (*fig.* 14), la ligne OK ne sortira pas du plan des xy (*), le point G se mouvra parallèlement à ce plan, et la projection de OG sur l'axe des z restera constante. Donc :

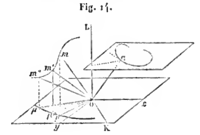
THÉORÈME III. — *Quand le plan du couple résultant des forces extérieures, considéré par rapport à un certain point O et pour une époque t quelconque, renferme constamment une droite fixe Oz, la somme des moments des quantités de mouvement par rapport à cette droite reste constante.*

(*) Ou bien, ce qui revient au même, le couple résultant des forces extérieures passe constamment par la droite Oz.

C'est le théorème de la *conservation des moments*.

On peut introduire dans cet énoncé la notion des aires décrites par les projections des points (m) sur le plan des xy.

Fig. 14.



En effet, nous avons vu que le moment de la quantité de mouvement d'un point par rapport à un axe n'est autre chose que le double produit de la masse du point par la vitesse aréolaire de la projection μ de ce point sur un plan perpendiculaire à l'axe. Le théorème III nous apprend que, dans le cas qui nous occupe, la somme des produits de ce genre, étendue à tous les points du système matériel considéré, reste constante pendant toute la durée du mouvement.

Si nous désignons par λ l'aire qui correspond au point dont la masse est m, la vitesse aréolaire correspondante est $\frac{d\lambda}{dt}$; on a donc

$$\sum m \frac{d\lambda}{dt} = C,$$

ou en faisant, pour abréger, $\Lambda = \Sigma m\lambda$,

$$\frac{d\Lambda}{dt} = C. \tag{8}$$

L'intégrale de cette équation est

$$\Lambda = Ct, \tag{9}$$

et l'on peut énoncer le théorème de la conservation des moments de la manière suivante :

THÉORÈME. — *Quand la somme des moments des forces*

agissant sur un système de corps quelconques est nulle par rapport à un certain axe fixe, la somme des produits des différents points du système par les aires que décrivent, pendant un temps quelconque t, les rayons vecteurs menés à ces points et projetés sur un plan perpendiculaire à l'axe, croît proportionnellement au temps t.

Tel est le théorème de la *conservation des aires.*

Dans le cas plus particulier où la somme des moments des forces extérieures est nulle, pour tous les axes passant par un point fixe O de l'espace, c'est-à-dire dans le cas où toutes les forces extérieures du système regardé comme invariable ont une résultante qui passe par un point fixe, le théorème existe pour tous les axes passant par le point, et en particulier pour trois axes rectangulaires fixes Ox, Oy, Oz. On a ainsi trois équations

$$(10) \qquad \begin{cases} A = Ct, \\ A' = C't, \\ A'' = C''t. \end{cases}$$

Enfin, si les forces extérieures ont une résultante nulle, les équations données par le principe des aires auront lieu pour tous les points de l'espace (*).

(*) Lors donc qu'un système de points ou de corps, libres ou liés entre eux, est sollicité par des forces qui se détruiraient si le système était rigide (ou du moins qui n'auraient d'autre effet que de développer des tensions ou pressions dans les liens réels ou fictifs des diverses parties de ce système), ces forces produiront certains mouvements intérieurs; mais on a toujours les propriétés suivantes :

1° *La somme des quantités de mouvement, estimées suivant une direction fixe, est constante;*

2° *Le centre de gravité du système se meut uniformément dans la direction de la résultante de translation des quantités de mouvement;*

3° *Enfin la somme des moments de ces quantités de mouvement par rapport à une droite fixe quelconque est constante.*

Ce qu'on peut aussi énoncer :

La somme des aires décrites par les différents points du système, multipliées respectivement par les masses des points correspondants, prise à un instant quelconque et pendant un temps infiniment petit, est constante.



Application du théorème de la conservation des aires.

Le théorème de la conservation des aires, joint à celui qui est relatif à la conservation du centre de gravité, nous apprend quels sont les phénomènes qui, dans le mouvement d'un système quelconque, sont uniquement dépendants des forces extérieures. On peut tirer de notre nouveau théorème des conséquences du même genre que celles que nous avons développées dans le paragraphe précédent.

Ainsi, l'explosion qui brise un corps, non-seulement n'a aucune action sur le mouvement du centre de gravité, mais, de plus, si ce corps est animé d'un mouvement de rotation, ce qui a lieu pour toutes les planètes connues, la somme des aires décrites par tous les éclats, multipliées par leurs masses et projetées sur un plan perpendiculaire à l'axe, conserve la même valeur qu'avant le cataclysme.

La Terre est animée d'un mouvement de rotation, en vertu duquel la somme que nous avons désignée par A acquiert une certaine valeur, pendant un temps déterminé. Si la température moyenne du globe vient à baisser, il éprouve une diminution de volume et chacune des aires qui figurent dans la somme A s'accroîtrait dans un temps donné d'une quantité moindre, si la vitesse angulaire du mouvement de la Terre restait constante. Cette remarque établit une relation curieuse entre la température de la Terre et la durée du jour sidéral.

Enfin les êtres animés doivent également se soumettre aux règles qu'on déduit du principe des aires, dans les mouvements qu'ils veulent imprimer aux diverses parties de leurs corps (*). « Un homme isolé dans l'espace, soustrait à l'action de toute force extérieure et supposé en repos, cet homme, dis-je, non-seulement ne pourra pas déplacer son centre de gravité, mais encore il ne lui sera pas possible de donner à son corps un mouvement de rotation autour de ce point. En effet, de quelque manière qu'il fasse jouer ses muscles, il ne peut développer que des forces intérieures; et l'absence de toute force extérieure entraîne, comme conséquence, que la somme

(*) DELAUNAY, *Traité de Mécanique rationnelle*. Citation libre.

des aires décrites, en projection sur un plan quelconque passant par son centre de gravité, par les rayons vecteurs émanés de ce point, conserve constamment la même valeur. Donc cette somme d'aires doit rester constamment nulle, puisqu'elle l'était tout d'abord en vertu de l'hypothèse que nous faisons, que l'être animé dont il s'agit était primitivement immobile. Ainsi, lorsqu'il fait mouvoir certaines parties de son corps de telle manière que la somme des aires qui leur correspondent, en projection sur un certain plan, ait une valeur positive, il y a nécessairement d'autres parties du corps qui se meuvent en même temps dans un autre sens, de manière à fournir une somme d'aires négative sur le même plan, la somme totale des aires relative à toutes les parties du corps restant égale à zéro.

» Lorsqu'un danseur, s'appuyant sur le sol par la pointe d'un seul pied, veut se donner un mouvement de rotation autour de la verticale passant par son centre de gravité, il ne peut pas produire ce mouvement par la seule action de ses forces musculaires, parce que ces forces, qui sont intérieures, ne peuvent pas faire que la somme des aires décrites autour de la verticale du centre de gravité passe d'une valeur nulle à une valeur différente de zéro. Si le danseur veut pirouetter vers la gauche, la partie inférieure tend à tourner vers la droite; mais ce dernier mouvement ne pouvant se faire que par un glissement des diverses parties du pied sur le sol, il en résulte qu'il se développe un frottement en chacun des points d'appui. Or ces frottements sont des forces extérieures pour lesquelles la somme des moments par rapport à la verticale menée par le centre de gravité n'est pas nulle; de sorte que, par suite de l'action de ces forces extérieures, le corps du danseur peut prendre un mouvement de rotation autour de la verticale. Lorsqu'il a tourné un peu de cette manière, sans que son pied cesse de toucher le sol, il se soulève brusquement pour faire disparaître la torsion de son corps, et, en répétant plusieurs fois de suite la même manœuvre, il parvient à se donner un mouvement de rotation assez rapide. Si le danseur était sur un sol très-glissant, ou bien s'il ne s'appuyait sur le sol que par un seul point, il lui serait impossible de tourner sur lui-même, comme nous venons de le dire. »

Plan du maximum des aires.

Les quantités

$$\frac{d\Lambda}{dt}, \quad \frac{d\Lambda'}{dt}, \quad \frac{d\Lambda''}{dt}$$

sont proportionnelles aux sommes des moments des quantités de mouvement de tous les points du système, pris à un instant donné par rapport à trois axes rectangulaires fixes; ou, si l'on veut, proportionnelles aux projections de la ligne OG sur ces mêmes axes (*fig.* 13 et 14).

Écrire que ces trois projections sont constantes, c'est dire que la grandeur de l'axe du couple résultant des quantités de mouvement, ainsi que la direction du plan du couple, sont invariables pendant toute la durée du mouvement.

Ce plan du couple résultant jouit de cette propriété, que la somme des moments des quantités de mouvement est un maximum autour de la perpendiculaire à ce plan; ou, ce qui revient au même, c'est sur ce plan que la somme des produits des masses par les projections des aires est un maximum. C'est le *plan du maximum des aires.*

On peut toujours déterminer, à un instant donné, les coordonnées de ce plan d'après la définition précédente, indépendamment de toute hypothèse faite sur les forces extérieures.

Pour cela, considérons l'une de nos aires élémentaires, décrite par le rayon vecteur allant de l'origine au point dont la masse est m; désignons par $d\lambda, d\lambda', d\lambda''$ les projections de cette aire sur les trois plans coordonnés, par da la projection de la même aire sur un plan P, faisant respectivement les angles α, β, γ avec les trois plans coordonnés.

Les formules connues donnent

$$da = d\lambda \cos\alpha + d\lambda' \cos\beta + d\lambda'' \cos\gamma;$$

multiplions par m, et faisons la somme des quantités analogues pour tous les points du système, il vient

$$(11) \qquad \Sigma m\, da = d\Lambda \cos\alpha + d\Lambda' \cos\beta + d\Lambda'' \cos\gamma.$$

Soit dA une aire plane dont les projections sur les trois plans coordonnés aient pour valeurs respectives $d\Lambda$, $d\Lambda'$, $d\Lambda''$. Si

nous désignons par p, q, r les angles que le plan de cette aire fait avec les trois plans coordonnés, nous aurons

$$(12)\qquad \begin{cases} dA = dA\cos p, \\ dA' = dA\cos q, \\ dA'' = dA\cos r; \end{cases}$$

et par suite, la somme des projections des aires élémentaires répondant aux points matériels que nous considérons sur le plan P sera

$$(13)\qquad \Sigma m\,da = dA\,(\cos\alpha\cos p + \cos\beta\cos q + \cos\gamma\cos r).$$

La quantité entre parenthèses n'est autre chose que le cosinus de l'angle compris entre le plan P et le plan de l'aire dA. Il suit de là que la somme des produits des aires projetées par les masses correspondantes est un maximum quand on prend le plan de l'aire dA pour plan de projection, c'est-à-dire quand on a

$$\alpha = p,\quad \beta = q,\quad \gamma = r.$$

Or les équations (12) donnent

$$dA^2 = dA^2 + dA'^2 + dA''^2,$$

par suite

$$(14)\qquad \begin{cases} \cos p = \dfrac{dA}{\sqrt{dA^2 + dA'^2 + dA''^2}}, \\ \cos q = \dfrac{dA'}{\sqrt{dA^2 + dA'^2 + dA''^2}}, \\ \cos r = \dfrac{dA''}{\sqrt{dA^2 + dA'^2 + dA''^2}}. \end{cases}$$

Ces cosinus définissent la direction du plan du maximum des aires. Si le théorème a lieu, c'est-à-dire si l'on a

$$dA = C\,dt,$$
$$dA' = C'\,dt,$$
$$dA'' = C''\,dt,$$

il arrive que t disparaît des expressions (9); les cosinus sont des constantes, et le plan du maximum des aires conserve une direction invariable pendant le mouvement.

§ IX. — Théorème des forces vives.

Nous avons démontré, dans la quatrième section de cet ouvrage, que le demi-accroissement de force vive d'un système matériel quelconque, pendant un temps arbitraire, est égal à la somme des travaux, pendant le même temps, de toutes les forces qui agissent sur les divers points de ce système.

On a ainsi l'équation

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} &\Sigma \tfrac{1}{2} m v^2 - \Sigma \tfrac{1}{2} m v_0^2 \\ &= \Sigma \mathrm{TF} + \Sigma \mathrm{T} f \\ &= \sum \int_{t_0}^{t} [(\mathrm{X} + \mathrm{x})\,dx + (\mathrm{Y} + \mathrm{y})\,dy + (\mathrm{Z} + \mathrm{z})\,dz], \end{aligned} \right.$$

dans laquelle on voit que figurent en général les forces intérieures (*).

Intégrale des forces vives. — Quand la somme des travaux élémentaires des forces, tant intérieures qu'extérieures, est la

(*) Nous avons vu que la somme des travaux des forces intérieures d'un système quelconque est une somme d'intégrales de la forme $\int f dl$, f étant l'intensité d'une des forces intérieures, et dl la variation de distance des points dont l'action mutuelle est f.

Il suit de là que les forces intérieures ne disparaissent de l'équation des forces vives que dans des cas très-particuliers, parmi lesquels nous avons distingué (IIe Partie, *Statique*, p. 166) trois cas qui correspondent à un solide invariable, à un fluide incompressible et à un corps doué d'une élasticité parfaite. Il faut supposer, pour les corps de cette dernière catégorie, qu'on applique le théorème à un intervalle de temps tel que le corps, à l'instant final, soit revenu exactement à son état initial. Alors, en vertu même de la définition de l'élasticité parfaite, les forces intérieures, qui avaient développé un certain travail pendant que le corps subissait une déformation, développent un travail précisément égal et de signe contraire, tandis que le corps revient à sa forme primitive, de sorte que chaque intégrale de la forme

$$\int f dl$$

n'est plus nulle élément par élément comme dans les cas précédents, mais se trouve égale à zéro, grâce aux limites choisies.

Il ne sera peut-être pas inutile, à ce propos, de signaler l'erreur suivante, qui peut embarrasser quelques instants quand on ne fait pas bien attention à la véritable signification des symboles analytiques.

Dans le cas particulier où l'on donne aux différents points matériels d'un

différentielle exacte d'une fonction V des coordonnées des divers points mobiles, l'équation (1) peut s'écrire

(2) $$\Sigma \tfrac{1}{2} mv^2 - \Sigma \tfrac{1}{2} mv_0^2 = V - V_0.$$

---

système des mouvements compatibles avec les liaisons du système, le théorème de d'Alembert fournit l'équation

$$\sum\left[\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right] = 0,$$

où les forces intérieures n'entrent pas. Mais, parmi tous les déplacements compatibles avec les liaisons du système, il semble qu'on puisse choisir en première ligne celui qu'il prend réellement, c'est-à-dire qu'on puisse remplacer, dans l'équation précédente, δx, δy, δz respectivement par dx, dy, dz. L'équation prend ainsi la forme

$$\Sigma(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = d\,.\,\Sigma \tfrac{1}{2} m v^2;$$

et l'on voit qu'elle ne contient pas de trace des forces intérieures.

Voici quel est le vice du raisonnement précédent. Dire qu'un ensemble donné de déplacements virtuels, représenté d'une manière générale par δx, δy, δz, est compatible avec les liaisons du système, c'est dire que la différentielle de chacune des équations de condition

$$\varphi_i(x, y, z, t) = 0$$

est nulle quand on donne aux coordonnées x, y, z les accroissements δx, δy, δz, et qu'on laisse t constant. En effet, on écrit en définitive des équations d'équilibre, et, pour cet équilibre, les liaisons doivent être considérées telles qu'elles sont à l'instant que l'on considère; on doit donc avoir

(3) $$\sum\left(\frac{d\varphi_i}{dx}\delta x + \frac{d\varphi_i}{dy}\delta y + \frac{d\varphi_i}{dz}\delta z\right) = 0.$$

Or les déplacements dx, dy, dz ne satisfont pas en général à cette équation, parce que la relation

$$\varphi_i(x, y, z, t) = 0$$

n'est satisfaite par les valeurs $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ qu'à la condition d'y faire aussi varier t de son accroissement dt, et alors on doit avoir

(4) $$\sum\left(\frac{d\varphi_i}{dx}dx + \frac{d\varphi_i}{dy}dy + \frac{d\varphi_i}{dz}dz\right) + \frac{d\varphi_i}{dt}dt = 0.$$

Les deux équations (3) et (4) ne sont compatibles que si $\frac{d\varphi_i}{dt} = 0$, c'est-à-dire si le temps n'entre pas explicitement dans les équations de liaison. C'est le seul cas où les forces extérieures disparaissent de l'équation des forces vives (cette équation étant considérée d'une manière générale, et non plus comme dans les cas des corps élastiques, appliquée entre deux limites choisies particulièrement).

Sous cette forme, elle constitue une intégrale du problème.

L'intégrale des forces vives a une importance toute particulière qui la distingue de toutes les autres intégrales, aussi bien dans la mécanique rationnelle que dans la mécanique appliquée. Les problèmes pour lesquels l'intégrale des forces vives a lieu sont les seuls dont s'occupe la mécanique analytique : ils comprennent tous ceux qui sont relatifs au système du monde. En effet, quand la force qui s'exerce entre deux points, fixes ou mobiles, dépend uniquement de la distance r de ces deux points, la somme des travaux de l'action et de la réaction pour des déplacements élémentaires quelconques des points considérés a pour expression $f(r)dr$, quantité qui est la différentielle exacte d'une certaine fonction $\varphi(r)$.

Principe de la conservation des forces vives. — Quand la somme des travaux de toutes les forces agissant sur le système est constamment nulle, la force vive reste invariable pendant le mouvement; le système *conserve* sa force vive.

Stabilité de l'équilibre des systèmes pesants.

Le théorème des forces vives peut nous rendre compte des conditions de la stabilité de l'équilibre d'un système pesant à liaisons. Nous avons vu qu'un système de ce genre est en équilibre lorsque son centre de gravité ne sort pas du plan horizontal qui le contenait tout d'abord, quel que soit le déplacement infiniment petit, et compatible avec les liaisons, que l'on attribue au système. Admettons maintenant que l'on donne au système un déplacement fini, mais très-petit, et toujours compatible avec les liaisons, et que, quel que soit ce déplacement fini, le centre de gravité du système s'élève toujours au-dessus de sa position d'équilibre; je dis que, dans ce cas, l'équilibre du système est *stable*. Nous allons voir, en effet, à l'aide du théorème des forces vives, que, si l'on abandonne à lui-même le système très-peu dérangé de sa position d'équilibre, l'action de la pesanteur tendra toujours à le rapprocher de cette position.

Pour établir cette proposition, nous remarquerons d'abord que le système matériel dont il s'agit ne peut pas rester immo-

bile dans la nouvelle position qu'on lui a donnée, pourvu toutefois que le déplacement attribué à ce système soit suffisamment petit. Car le centre de gravité du système, qui s'est élevé par hypothèse dans ce déplacement fini, continuerait encore à s'élever infiniment peu, si l'on donnait au système un nouveau déplacement infiniment petit dans le même sens que le précédent; et par conséquent la condition d'équilibre n'est plus remplie pour la position qu'occupe le système après qu'il a subi le déplacement fini dont il est question. Le système matériel, ne pouvant pas être en équilibre dans la nouvelle position qu'on lui a donnée, se mettra nécessairement en mouvement sous l'action de la pesanteur, et par conséquent acquerra une certaine force vive. Or sa force vive ne peut s'accroître qu'autant que la somme des travaux des forces qui lui sont appliquées est positive; d'un autre côté, les forces capables de remplacer les liaisons ne fournissent aucun terme dans cette somme de travaux; il en résulte que, dans le mouvement que prend le système matériel abandonné à lui-même après avoir été dérangé de sa position d'équilibre, le travail dû à la pesanteur doit être positif. Mais nous savons que ce travail est le même que si la masse entière du système était concentrée en son centre de gravité; donc, dans le mouvement dont il s'agit, ce centre de gravité ne peut que descendre, c'est-à-dire qu'il se rapproche nécessairement de la position qu'il occupait lorsque le système était en équilibre.

Un raisonnement analogue ferait voir qu'au contraire, dans le cas où le centre de gravité du système pourrait s'abaisser par suite du déplacement fini, mais très-petit, attribué au système, l'équilibre serait *instable;* c'est-à-dire que le système, abandonné à lui-même après avoir subi un pareil déplacement, non-seulement ne reviendrait pas vers la position d'équilibre qu'il avait d'abord, mais encore continuerait à s'en éloigner.

Enfin, l'équilibre est indifférent quand, par suite d'un déplacement fini, mais très-petit, attribué au système, le centre de gravité ne sort pas d'un plan horizontal.

Le résultat précédent est exact; mais notre démonstration n'est pas suffisante. En effet, nous avons bien démontré que si, en écartant le corps de la position d'équilibre, le centre de gravité monte, il tend à revenir à sa position première, mais

nous ne savons pas s'il restera dans le voisinage de cette position, comme la stabilité l'exige, ou s'il ne la dépassera pas pour s'en écarter ensuite d'une manière notable, en vertu de sa force vive acquise. Prouver que l'équilibre est stable, c'est établir qu'on peut toujours écarter assez peu le système de sa position d'équilibre, dans le sens que l'on voudra, pour que la force vive du système abandonné à lui-même reste constamment très-petite. Pour le développement de cette question intéressante, je renverrai à un beau Mémoire de M. Dirichlet (*Journal de Crelle*, t. 32, p. 85).

§ X. — Extension au cas des mouvements relatifs des théorèmes généraux sur le mouvement des systèmes matériels.

Les théorèmes généraux que nous venons de démontrer, ainsi que toutes les conséquences que nous en avons déduites, sont applicables au mouvement d'un système matériel par rapport à des axes coordonnés mobiles, pourvu qu'on n'oublie pas de joindre aux forces réelles les forces apparentes qui permettent de traiter le mouvement relatif de chacun des points du système comme un mouvement absolu. Ces forces apparentes sont, comme on sait, au nombre de deux pour chaque point : l'une est la force d'inertie correspondante au mouvement d'entraînement, l'autre est la force centrifuge composée (*).

Dans le cas où les axes mobiles, auxquels on rapporte le mouvement du système matériel, se meuvent parallèlement à eux-mêmes, les forces centrifuges composées sont toutes nulles; les forces apparentes se réduisent donc aux forces d'inertie, qui correspondent au mouvement d'entraînement. Si, en outre, le mouvement de translation des axes est rectiligne et uniforme, ces forces d'inertie sont également nulles; les théorèmes généraux s'appliquent donc au mouvement re-

(*) Nous avons déjà fait observer que, dans l'application du théorème des forces vives aux mouvements relatifs, les forces centrifuges composées disparaissent d'elles-mêmes, chacune d'elles étant dirigée perpendiculairement à la vitesse relative du point auquel elle est appliquée.

latif, dans ce cas, exactement de la même manière qu'ils s'appliquent au mouvement absolu, sans qu'on ait besoin de joindre aucune force apparente aux forces qui agissent réellement sur le système.

Mouvement d'un système matériel par rapport à des axes de direction constante passant par le centre de gravité.

Voici maintenant comment on applique les théories précédentes à l'étude du mouvement d'un système quelconque de points matériels : on commence par étudier le mouvement du centre de gravité, mouvement qui est déterminé quand on connaît les forces extérieures qui agissent sur le système; puis on applique à ce point des axes de direction constante, et l'on cherche quel est le mouvement du système par rapport à ces axes, liés au centre de gravité.

Remarquons d'abord que, géométriquement, toutes les forces d'inertie se réduisent à une seule qui passe à l'origine. En effet, ces forces sont parallèles et de sens contraire à l'accélération totale du mouvement absolu du centre de gravité du système, et la grandeur de chacune d'elles s'obtient en multipliant la masse du point auquel on la suppose appliquée par cette accélération totale du centre de gravité. Donc ces forces, qui sont parallèles et proportionnelles aux masses, se composent comme des poids, et, géométriquement, elles ont une résultante qui leur est parallèle, égale à leur somme, et qui passe par le centre de gravité des divers points d'application.

Si ces points formaient un solide invariable, on pourrait remplacer toutes les forces d'inertie par leur résultante, supprimer cette dernière, qui se trouve appliquée à un point fixe, dans le mouvement relatif. Pour un système quelconque, on ne peut remplacer les forces d'inertie par leur résultante, parce que chacune d'elles a une action spéciale au point auquel elle est appliquée, mais il est évident que la somme des moments de ces forces par rapport à un axe quelconque passant par l'origine est toujours nulle, puisque ces sommes de moments sont des quantités géométriques, dans le calcul desquelles la constitution du corps n'intervient pas. On conclut de là que, dans le cas particulier où les forces réelles,

composées comme si elles agissaient sur un solide invariable, ont une résultante nulle ou passant par le centre de gravité (*), le théorème des aires a lieu dans le mouvement relatif dont nous nous occupons, malgré la mobilité du point pris pour origine des rayons vecteurs menés aux divers points matériels du système. Le plan du maximum des aires conserve une direction constante dans l'espace, et la somme des aires projetées sur ce plan, à partir d'une époque fixe quelconque, augmente proportionnellement au temps.

C'est en appliquant ce qui précède au mouvement de notre système planétaire que Laplace a été conduit à considérer le plan dû maximum des aires correspondant au centre de gravité, dans le mouvement de ce système, par rapport à des axes de direction constante menés par ce point, plan auquel il a donné le nom de *plan invariable*, et qu'il a proposé de prendre pour plan fixe dans l'étude du mouvement des divers astres. On obtient ainsi un plan qui reste constamment parallèle à lui-même, bien qu'on ne connaisse aucun point fixe.

Il y a plus, si le système solaire tout entier était soumis à l'action d'un point assez éloigné de ce système pour que les différents corps qui en font partie puissent être regardés comme situés à la même distance de ce point, les actions exercées sur ces corps auraient une résultante géométrique passant au centre de gravité, et, par suite, le plan invariable subsisterait encore.

Théorème des forces vives. — Le théorème des forces vives s'applique également au mouvement d'un système matériel par rapport à des axes de direction constante menés par son centre de gravité, sans qu'il soit besoin de joindre aucune force apparente aux forces qui agissent réellement sur le système.

(*) Dans le cas où les forces extérieures satisfont aux conditions de l'équilibre, le théorème des aires a lieu indifféremment quand on prend pour origine soit un point fixe quelconque, soit le centre de gravité ou tout autre point animé d'un mouvement rectiligne et uniforme.

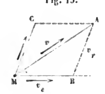
Quand les forces ont une résultante qui passe au centre de gravité, le théorème est vrai seulement pour le centre de gravité ou pour un point qu'on assujettirait à se trouver constamment sur la direction de la résultante des forces ou de l'accélération totale du centre de gravité. Cette condition est indispensable pour que la somme des moments des forces extérieures et celle des moments des forces d'inertie soient nulles.

En effet, la somme des travaux des forces d'inertie peut être remplacée par le travail d'une force unique appliquée au centre de gravité; par conséquent, cette somme de travaux est nulle dans le mouvement relatif que nous considérons, puisque le déplacement relatif du centre de gravité est constamment nul.

Cela ne serait plus vrai si l'on prenait pour origine des axes un point mobile quelconque, à moins toutefois que ce point ne soit animé d'un mouvement rectiligne et uniforme.

Relation entre la force vive réelle et la force vive rapportée au centre de gravité. — En supposant toujours que l'origine mobile soit le centre de gravité du système, il existe une relation très-simple entre la force vive absolue et la force vive relative. Considérons un point quelconque M (*fig.* 15). La vitesse

Fig. 15.



absolue MA = V de ce point est la résultante de la vitesse du centre de gravité MB $= v_e$, constante pour tous les points du système en grandeur et en direction, et de la vitesse relative BA $= v_r$, et l'on a l'équation

$$v^2 = v_e^2 + v_r^2 + 2 v_e v_r \cos \overline{v_e, v_r}.$$

Multiplions les deux membres de cette équation par m, et faisons la somme de toutes les équations analogues, il vient, en n'oubliant pas que v_e est une constante pour tous les points du système,

$$\Sigma m v^2 = M v_e^2 + \Sigma m v_r^2 + 2 v_e \Sigma m v_r \cos \overline{v_e, v_r}.$$

Remarquons que la somme qui multiplie $2v_e$, dans le dernier terme de cette équation, est identiquement nulle; en effet, c'est la somme des produits qu'on obtient en multipliant la masse de chaque point matériel par la projection de sa vitesse relative sur la direction MB; or cette somme est égale à

la masse M, multipliée par la projection sur la même direction de la vitesse relative du centre de gravité, laquelle vitesse est nulle.

On a ainsi le résultat suivant :

Théorème. — *La force vive absolue d'un système quelconque est égale à la force vive du même système dans un mouvement relatif à trois axes animés de la vitesse du centre de gravité, plus la force vive qu'aurait la masse totale, supposée concentrée au centre de gravité.*

On calculerait, au moyen de ce théorème, la force vive de la Terre, en tenant compte de son double mouvement de rotation sur elle-même et de translation autour du Soleil.

Un corps, tel qu'un bateau ou une voiture, étant animé d'un mouvement lent de translation, on calcule le travail qu'il faut pour l'arrêter, en faisant le produit de sa masse par le carré de sa vitesse. Considérons au contraire un boulet arrivant avec une vitesse apparente très-faible, mais animé en réalité d'un mouvement de rotation très-rapide, qui échappe à nos yeux en vertu de sa rapidité même : sa force vive réelle est bien supérieure à celle qu'on lui attribue, en ne tenant compte que de son mouvement de translation, et l'on peut recevoir un choc violent en essayant imprudemment de lui opposer un obstacle.

C'est la même raison qui fait que l'on voit souvent une bille de billard, arrivant presque morte à toucher une bande, retrouver après le choc une vitesse notable, par suite d'une autre distribution de la force vive qui correspondait à son mouvement de rotation.

CHAPITRE III.

APPLICATIONS DE LA THÉORIE A QUELQUES QUESTIONS DE MÉCANIQUE PRATIQUE.

§ XI. — Théorie du choc.

La première application que nous ferons se rapporte à l'une des théories les plus importantes de la Mécanique : celle du *choc* des solides naturels.

Définissons d'abord ce que l'on doit entendre par le choc. Deux corps sont en mouvement, et il résulte des lois individuelles de leurs mouvements que ces corps devraient venir occuper au même instant une même portion de l'espace. C'est ce qui n'est pas possible, en vertu de ce qu'on appelle l'*impénétrabilité de la matière*. Aussi observe-t-on, dans le cas que nous avons supposé, des phénomènes particuliers, qui s'accomplissent dans un temps très-court (non infiniment court), temps pendant lequel les mouvements des deux solides éprouvent des modifications finies.

Ces phénomènes sont connus sous le nom de *choc*.

Pour se rendre un compte exact de ce qui se passe pendant le choc, il n'est pas nécessaire de doter la matière d'une propriété nouvelle et plus ou moins mystérieuse, qui, sous le nom d'*impénétrabilité*, empêche d'une manière absolue deux corps différents d'occuper simultanément une même portion de l'espace. Il suffit, pour faire rentrer le choc dans la classe des phénomènes dont l'étude fait l'objet de la Dynamique, de supposer qu'au moment où les deux corps considérés arrivent au contact géométrique, probablement même un peu avant, il se développe, entre celles de leurs molécules qui sont suffisamment voisines, des forces qui tendent à modifier les vitesses des deux corps, de manière à les empêcher d'atteindre au même instant un même point de l'espace.

C'est à ces forces moléculaires, dont l'intensité est considérable, et dont en même temps la sphère d'action est extrêmement petite, qu'on doit rattacher les phénomènes de la *cohésion* des corps solides, de la *viscosité* des corps liquides, etc.

Ces forces étant des forces intérieures, par rapport au système des deux corps, il en résulte que tous les théorèmes de Dynamique dans lesquels ces forces intérieures n'entrent pas s'appliqueront sans altération aux deux corps avant comme après le choc. Quant aux forces extérieures qui agissent sur le système, leur effet pendant le choc peut être négligé, à cause du peu de durée du phénomène, dans les équations où ces forces entrent, soit par leurs impulsions, soit par les moments de ces impulsions.

En effet, considérons des intégrales telles que

$$\int F\,dt \quad \text{ou} \quad \int F p\,dt,$$

dans lesquelles entrent les forces extérieures F et leurs bras de levier p, et concevons qu'on remplace F et p par leurs valeurs maxima respectives F_1 et p_1, pendant le temps θ que dure le choc, il est évident qu'on exagère ainsi les valeurs de ces intégrales. Or les quantités qu'on obtient ainsi,

$$F_1\theta, \quad F_1 p_1 \theta,$$

sont tout à fait négligeables, parce que θ est très-petit et que F_1 et p_1 ont des valeurs moyennes qui ne dépassent jamais certaines limites très-restreintes.

Il résulte de là que la vitesse du centre de gravité des deux corps sera la même après le choc qu'avant le choc, et que les sommes des projections et des moments des quantités de mouvement conserveront aussi les mêmes valeurs pour un système d'axes coordonnés quelconques.

Considérons, au contraire, le théorème des forces vives; nous pouvons encore ne pas tenir compte de l'effet des forces extérieures, qui consiste à introduire dans l'équation des termes de la forme

$$\int F\,ds;$$

car, en raisonnant comme précédemment, nous voyons que cette expression est plus petite que $F_1\sigma$, en appelant σ le déplacement très-petit du point d'application pendant le temps θ,

et F_1 la valeur maxima de la composante tangentielle F. Mais il faut se préoccuper du travail des forces intérieures, lequel est représenté par des intégrales de la forme

$$\int f dl;$$

dans le cas qui nous occupe, la force du choc f a une valeur très-grande, d'autant plus grande que dl est plus petit, et, par suite, il y a compensation entre les deux facteurs : leur produit ne peut pas être négligé. Donc, dans le choc, il y a toujours altération de la force vive totale, eu égard au travail des déformations moléculaires.

Le plan de cet Ouvrage ne comporte pas l'exposition de la théorie du choc dans toute sa généralité. Voulant seulement donner une idée de la manière dont on doit traiter les questions de ce genre, nous nous bornerons à étudier le cas le plus simple, celui du *choc direct*, et nous supposerons qu'il s'agisse de deux corps sphériques homogènes dont les dimensions importent peu, animés de mouvements de translation rectilignes et uniformes suivant la ligne qui joint leurs centres de figure (*fig.* 16).

Fig. 16.

(m) (m')

v_0 v'_0

Tout étant symétrique par rapport à cette ligne, il est évident que les mouvements après le choc seront encore des translations dont la direction n'aura pas changé, et il n'y a qu'à déterminer les nouvelles vitesses des deux corps.

Soient m et m' les masses de nos deux sphères, v_0, v'_0 leurs vitesses respectives, que nous supposerons dirigées dans le même sens. Alors, pour qu'il y ait choc, on devra nécessairement avoir

$$v_0 > v'_0.$$

Cela posé, les forces moléculaires dont nous avons parlé tendent évidemment à diminuer la vitesse du corps (m), à augmenter la vitesse du corps (m'), et cela, tant que les vi-

tesses de ces deux corps ne seront pas rigoureusement égales; il faudra nécessairement qu'au bout d'un certain temps, toujours très-court, les deux corps se trouvent animés d'une même vitesse V.

Pour déterminer cette vitesse commune, nous appliquerons le théorème des quantités de mouvement, projetées sur la droite suivant laquelle se meuvent les centres des deux corps.

D'après les hypothèses que nous avons faites, le système des deux corps n'est soumis à aucune force extérieure; nous avons d'ailleurs remarqué que l'impulsion de pareilles forces, en supposant qu'elles existassent, pourrait toujours être négligée pendant la courte durée du choc. Comme, de plus, les forces intérieures n'entrent pas dans l'équation des quantités de mouvement, nous concluons de là que la somme algébrique des quantités de mouvement des deux solides conserve constamment la même valeur.

En égalant cette somme de quantités de mouvement, prise avant le choc, à ce qu'elle devient à l'instant où les deux solides ont une même vitesse V, on obtient la relation

$$(1) \qquad mv_0 + m'v'_0 = (m + m')V,$$

d'où l'on déduit

$$(2) \qquad V = \frac{mv_0 + m'v'_0}{m + m'}.$$

A partir de l'instant où les deux solides ont acquis la vitesse commune V, les choses se passent de diverses manières, suivant la nature des solides. Les forces moléculaires, qui ont amené l'égalité de vitesse, n'ont pu se développer qu'autant que les solides ont éprouvé une certaine déformation dans le voisinage de leur point de contact; ces solides se sont aplatis vers ce point, et leur aplatissement a augmenté tant que la vitesse de (m) était encore supérieure à celle de (m'), c'est-à-dire tant que le centre de gravité du premier corps se rapprochait de celui du second.

Or, si les corps (m) et (m') sont des corps parfaitement mous, qui, une fois qu'on leur a fait subir une déformation, ne tendent en aucune façon à revenir aux formes qu'ils avaient

7.

d'abord, il est clair que deux corps de cette nature cessent de réagir l'un sur l'autre, à partir de l'instant où leurs vitesses sont devenues égales ; et, par conséquent, ils continuent à se mouvoir ensemble, avec la vitesse commune V, que nous venons de calculer.

Les choses ne se passent pas de la même manière lorsqu'il s'agit de corps élastiques, et le choc n'est pas terminé au moment où les deux corps possèdent une vitesse commune. En effet, l'aplatissement des deux solides tend à disparaître, et ils continuent à réagir l'un sur l'autre, en vertu de cette tendance, après que leurs vitesses sont devenues égales. La vitesse de (m) est encore diminuée, et celle de (m') augmentée, de sorte que, au bout d'un nouvel intervalle de temps très-court, les deux corps se séparent en vertu de l'inégalité de leurs vitesses finales.

Si les réactions qui se développent pendant cette seconde partie du choc ont les mêmes valeurs que celles qui s'étaient développées pendant la première partie, c'est-à-dire si le choc présente une symétrie complète de part et d'autre de l'instant qui correspond à la plus grande déformation des deux corps, on dit que ces corps sont *parfaitement élastiques*. Dans ce cas, la vitesse du corps (m), qui a déjà diminué de $v_0 - V$ pendant la première partie du choc, diminue encore de la même quantité pendant la seconde partie, et, de même, la vitesse du corps (m'), qui s'est accrue de $V - v'_0$ pendant la première partie, s'accroît encore d'autant pendant la seconde partie.

On a donc, en désignant par v et v' les vitesses des deux corps (m) et (m') au moment où ils se séparent l'un de l'autre,

$$(3) \qquad V - v = v_0 - V, \quad v' - V = V - v'_0 \ (*);$$

(*) On tire des équations (3)

$$v' - v = v_0 - v'_0,$$

équation indépendante des masses, qui nous apprend que la vitesse relative $v_0 - v'_0$ du corps choquant par rapport au corps choqué a conservé la même valeur et change simplement de signe après le choc ; il y a eu *réflexion relative* de l'un des corps sur l'autre.

d'où, en substituant la valeur de V,

$$(4)\qquad \begin{cases} v = \dfrac{v_0(m-m') + 2m'v'_0}{m+m'}, \\ v' = \dfrac{v'_0(m'-m) + 2mv_0}{m+m'}. \end{cases}$$

Voyons ce que deviennent ces équations dans quelques cas particuliers.

Supposons d'abord les deux masses égales, on a

$$(5)\qquad \begin{cases} v = v'_0, \\ v' = v_0 : \end{cases}$$

les deux corps ont échangé leurs vitesses.

Supposons que le corps choqué soit en repos avant le choc, c'est-à-dire faisons $v'_0 = 0$. On aura

$$(6)\qquad \begin{cases} v = \dfrac{m-m'}{m+m'} v_0, \\ v' = \dfrac{2m}{m+m'} v_0. \end{cases}$$

La vitesse v' du corps choqué est toujours positive, mais il n'en est pas de même de v: elle est positive, négative ou nulle, selon que l'on a

$$m > m', \quad m < m', \quad \text{ou} \quad m = m'.$$

Dans le premier cas, le corps choquant continue à se mouvoir dans le même sens; dans le second cas, il revient sur ses pas; enfin, dans le troisième, il reste en repos en communiquant sa vitesse au corps choqué (ce qui résulte également de la loi de l'échange des vitesses, dans le cas de l'égalité des masses).

Supposons enfin que le corps choqué soit remplacé par un plan inébranlable en repos, c'est-à-dire faisons $v'_0 = 0$, et $m' = \infty$, il viendra

$$(7)\qquad v' = 0, \quad v = -v_0.$$

Le corps choquant a pris, en sens contraire, la vitesse qu'il possédait avant le choc; c'est une conséquence de la loi de la

réflexion relative. Il suit de là qu'un corps parfaitement élastique qui tombe d'une certaine hauteur sur un plan horizontal doit remonter à la même hauteur d'où il est tombé.

Ce dernier résultat permet d'expliquer ce qui se passe dans le choc oblique.

Choc oblique. — Considérons une bille élastique, animée d'une vitesse v, et venant frapper obliquement un plan inébranlable (*fig.* 17).

Fig. 17.



Décomposons la vitesse v en deux, l'une v_n normale au plan, l'autre v_t parallèle à ce plan. Ceci posé, rapportons le mouvement à trois axes, animés d'une translation rectiligne et uniforme avec la vitesse v_t. Le mouvement relatif de la bille s'effectuera avec la vitesse v_n, et, conformément à notre théorie, la bille possédera après le choc, dans son mouvement relatif, une vitesse égale et directement opposée à v_n. Pour avoir sa vitesse absolue, il faut composer sa vitesse relative avec la vitesse d'entraînement v_t. On obtient ainsi, pour sa nouvelle vitesse v', la deuxième diagonale du rectangle déjà construit. Or les deux diagonales d'un rectangle sont égales et inversement inclinées sur les côtés de ce rectangle.

C'est le phénomène du ricochet.

Les deux cas que nous venons de considérer, et qui se rapportent, l'un à des corps entièrement dépourvus d'élasticité, l'autre à des corps parfaitement élastiques, doivent être considérés comme des limites extrêmes entre lesquelles tous les corps de la nature se trouvent compris.

Perte de force vive dans le choc des solides naturels.

Considérons d'abord le cas de deux corps mous. Au moyen de la formule qui donne la vitesse finale commune V, il est facile d'évaluer la perte de force vive qui résulte du travail des forces de choc.

Pour simplifier le calcul, nous remarquerons que le travail des forces intérieures, telles que celles qui se développent dans le choc, ne dépend que du mouvement relatif des deux corps. En effet, l'expression du travail de deux de ces forces est $\int f dl$, et ne dépend, par conséquent, que de la distance l de leurs points d'application, c'est-à-dire du mouvement relatif de l'un des corps par rapport à l'autre. Nous pouvons donc supposer l'un des corps en repos et l'autre animé d'une vitesse w_0 égale à la vitesse $v_0 - v'_0$. Nous aurons alors, pour la vitesse commune après le choc,

$$W = \frac{m}{m+m'} w_0.$$

La force vive avant le choc était égale à mw_0^2 ; après le choc, elle est devenue égale à $(m+m')W^2$; donc la perte de force vive est

$$mw_0^2 - (m+m')W^2 = mw_0^2 - (m+m')\frac{m^2}{(m+m')^2}w_0^2$$
$$= mw_0^2\left(1 - \frac{m}{m+m'}\right) = mw_0^2\frac{m'}{m+m'}.$$

Cette quantité étant essentiellement positive, il y a toujours une perte de force vive, perte qui représente en valeur absolue le double du travail négatif des forces intérieures. En remplaçant w_0 par sa valeur, on a

$$(8) \qquad -\Sigma \int f dl = \frac{mm'(v_0 - v'_0)^2}{m+m'}.$$

Théorème de Carnot. — On peut donner une autre expression de la perte de force vive qui se produit dans le choc des corps mous. On arrive encore à cette expression en s'appuyant sur ce que la force vive perdue dépend uniquement du mouvement relatif des deux corps, et en rapportant les mouvements de ces corps à des axes mobiles avec la vitesse finale V.

En effet, par rapport à ces axes, les vitesses initiales sont

$$v_0 - V, \quad v'_0 - V\ (*).$$

(*) Cette dernière quantité est négative.

et les vitesses finales sont nulles. Toute la force vive est donc perdue, ce qui représente une quantité égale à

$$m(v_0 - V)^2 + m'(v'_0 - V)^2.$$

Il est facile de vérifier que cette expression est équivalente à l'expression (8), au moyen de la valeur de V. Donc :

Théorème. — *La force vive perdue dans le choc est celle qui correspond aux vitesses perdues par chacun des deux corps.*

Ce théorème est un cas particulier d'un théorème célèbre de Carnot.

La perte de force vive qui accompagne toujours le choc des corps mous est fâcheuse à un double point de vue : d'abord parce que la force vive est une valeur industrielle qu'on paye; ensuite parce que cette force vive non utilisée a pour unique effet de détériorer les appareils, puisqu'elle représente, dans l'équation du travail, une quantité équivalente de travail résultant des déformations moléculaires.

On doit donc autant que possible éviter les chocs dans les machines, ou, quand cela ne se peut, les recevoir sur une substance élastique, telle que les ressorts de choc des wagons. Enfin quand le choc est indispensable pour l'effet utile que l'on veut obtenir, il faut au moins s'arranger de manière que la force vive perdue soit une petite fraction de la force vive totale dépensée.

Supposons qu'il s'agisse d'enfoncer à coups de marteau un clou dans une pièce de bois. Une partie de la force vive dont est animé le marteau se trouve transmise au clou par l'effet du choc; elle est employée à vaincre la résistance du bois, à faire entrer le clou : c'est la force vive utile. Quant à la force vive perdue, elle a pour unique effet de déformer le clou et d'en altérer la structure.

Cependant le travail de la réaction du bois détruit la force vive utile, et le clou s'arrête. On recommence alors, et tout se passe de la même manière. Si l'on prend un très-long clou et qu'on le frappe avec un petit marteau, on arrivera difficilement à faire pénétrer le clou, qui se déformera de toutes les manières possibles. Si, au contraire, on prend un marteau plus lourd, on fera pénétrer le clou sans difficulté.

Soit mv_0^2 la force vive du marteau avant le choc. La fraction de cette quantité qui se trouve perdue est, d'après la formule précédente,

$$\frac{m'}{m+m'} = \frac{1}{1+\frac{m}{m'}}.$$

Il y a donc avantage à augmenter la masse du corps choquant, et par suite à diminuer sa vitesse.

Le même principe s'applique, sur une grande échelle, dans le battage des pilotis. La planche de bois est remplacée par un sol pénétrable, le clou par un long pieu et le marteau par une masse très-pesante qu'on appelle un *mouton*.

C'est identiquement la même opération, et la conclusion est, comme dans le cas que nous venons d'étudier, qu'il faut un mouton très-lourd par rapport au pieu qu'on veut enfoncer. De cette manière, le travail qu'il faut payer pour élever le mouton se trouve utilisé d'une façon plus satisfaisante.

Corps élastiques. — Dans le cas du choc de corps élastiques, nous avons vu que la première période du choc, correspondant à la déformation des deux corps et à la perte de force vive que nous venons de calculer, est suivie d'une deuxième période pendant laquelle les forces moléculaires développent un travail positif, accompagné par conséquent d'un gain de force vive. Quand les deux corps sont parfaitement élastiques, la somme des travaux positifs produits pendant la seconde partie du choc a la même valeur absolue que la somme des travaux négatifs correspondant à la première partie; si donc on considère l'instant où le choc est complétement terminé, et où les deux corps vont se séparer, la somme des forces vives des deux corps doit avoir précisément la même valeur qu'avant le choc. C'est ce qu'on vérifie au moyen des équations (4), qui donnent

$$mv^2 + m'v'^2 = mv_0^2 + m'v_0'^2.$$

Tous les solides naturels étant compris entre les deux limites extrêmes d'une élasticité parfaite et d'un défaut complet d'élasticité, il s'ensuit que le choc de ces solides doit

présenter des circonstances intermédiaires entre celles qui se rapportent à ces deux limites. Ainsi, on peut dire que, dans le choc de deux solides naturels sphériques et homogènes, il y a toujours une perte de force vive due à ce que le travail positif développé par les forces moléculaires pendant la seconde partie du choc est inférieur à la valeur absolue du travail négatif que ces forces moléculaires développent pendant la première partie. Cette perte de force vive est plus ou moins petite, suivant que les deux solides se rapprochent plus ou moins de remplir les conditions de l'élasticité parfaite, telle que nous l'avons définie.

La différence entre les valeurs absolues des sommes des travaux dus aux forces moléculaires pendant les deux parties du choc tient à deux causes que nous devons indiquer : 1° les molécules des deux corps, écartées de leurs positions primitives pendant la première partie du choc, peuvent ne pas reprendre complétement ces positions lorsque le choc est terminé, en sorte que les corps conservent une portion de la déformation totale que le choc leur avait fait éprouver; 2° les molécules peuvent n'être pas revenues complétement à leurs positions définitives à l'instant où les deux corps se séparent, de sorte que ces molécules, en continuant à se mouvoir après cette séparation, en vertu de la vitesse qu'elles possèdent encore, prennent un mouvement vibratoire qui se transmet à toutes les molécules voisines, sans avoir aucune influence sur le mouvement d'ensemble de chacun des deux solides dans l'espace.

La différence entre la force vive du système avant le choc et la force vive du même système après le choc (cette dernière force vive étant évaluée abstraction faite du mouvement vibratoire des molécules des deux solides) peut être regardée comme une perte de force vive qui est due à la fois aux déplacements moléculaires persistants et aux vibrations occasionnées par le choc. Une portion de cette différence des forces vives du système, prises avant et après le choc, est bien absorbée par le travail résistant qui correspond aux déplacements persistants des molécules. L'autre portion, au contraire, n'est pas réellement perdue par l'effet du choc, puisqu'elle se retrouve, pour ainsi dire, à l'état latent dans le mouvement

vibratoire des molécules, mouvement dont nous ne tenons pas compte en évaluant la force vive finale du système. Mais, au point de vue de l'application de la Mécanique aux machines, on peut regarder cette seconde portion comme tout aussi bien perdue que la première.

Il est aisé de comprendre que les conséquences auxquelles nous venons de parvenir, dans le cas simple du choc direct de deux corps sphériques homogènes, peuvent être immédiatement généralisées. On peut dire que, toutes les fois qu'il se produit un choc entre deux solides naturels, ce choc est accompagné d'une perte de force vive plus ou moins grande, perte due aux déplacements persistants et aux vibrations des molécules des deux solides.

La forme des deux corps a une influence sur les effets secondaires de leur choc. C'est ce qu'on met en évidence en laissant tomber successivement sur un plan élastique une sphère de caoutchouc et un parallélépipède de la même substance. La sphère remonte presque à la hauteur dont elle est tombée (théoriquement, comme nous l'avons vu, elle devrait y remonter tout à fait), tandis que le parallélépipède ne rebondit que très-peu. Cela s'explique facilement d'après ce que nous avons dit, en remarquant que la zone de contact est beaucoup plus petite pour la sphère que pour le parallélépipède. Dans le second cas, il y a donc une part plus large faite aux vibrations, et par suite une diminution apparente de force vive plus considérable que dans le premier.

§ XII. — Vibrations des corps élastiques.

Les corps élastiques, tels que ceux qui sont employés dans la construction des édifices et des machines, éprouvent, sous l'influence des forces auxquelles ils se trouvent soumis, des déformations que la théorie de la résistance des matériaux apprend à calculer avec une approximation plus ou moins grande. A ces déformations correspond la mise en jeu des forces moléculaires, la tension des ressorts intérieurs, tension qui, pour la sécurité, ne doit pas dépasser certaines limites aujourd'hui assez bien connues. C'est encore la théorie de la

résistance des matériaux qui fournit aux praticiens les formules qui leur servent à calculer les dimensions des diverses parties d'une construction destinée à résister à des efforts donnés.

Seulement les formules auxquelles nous faisons allusion (nous avons donné dans la troisième section celles qui se rapportent au cas de la traction et de la compression directe) supposent la construction établie et en équilibre sous l'action des efforts de toute nature qui s'exercent sur elle; elles se rapportent, comme on dit, à l'état statique des corps considérés. Les choses se passent d'une manière toute différente, lors de la mise en charge, si l'on enlève brusquement les supports et étais provisoires qui ont servi à établir la construction, tels que les cintres des voûtes, etc. Dans ce cas, en effet, non-seulement les pièces subissent la déformation qui a été calculée eu égard à la charge, mais encore, par l'effet de la force vive dont ces pièces sont animées, les déformations dépassent le point où la réaction élastique fait équilibre à la charge, et elles augmentent jusqu'à ce que la force vive acquise ait été détruite par l'excès du travail résistant des réactions élastiques sur le travail moteur développé par la charge. Or, la position dans laquelle ce fait se produit n'étant pas une position d'équilibre, les molécules tendent à revenir à cette position, la dépassent de nouveau, et il se produit une série de vibrations qui durent jusqu'à ce que la force vive se soit dissipée en se communiquant aux supports ou à l'air ambiant.

Un exemple simple fera comprendre combien l'allongement dynamique diffère de l'allongement statique.

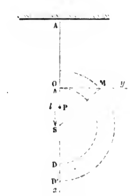
Considérons une tige verticale élastique (*fig.* 18), encastrée à son extrémité supérieure et chargée à l'autre d'un corps dont le poids est P. Nous négligerons la masse de la tige, dont nous désignerons la longueur à l'état naturel, AO, par L. Les lettres Ω et E représenteront, comme en Statique, la section de la base et le coefficient d'élasticité; et il résulte des formules trouvées dans le Chapitre que je rappelle qu'au moment où la barre éprouve un allongement $OP = x$, la réaction de cette barre est

$$F = E\frac{\Omega}{L}x.$$

Cela posé, le corps suspendu à l'extrémité de la tige est sou-

mis, d'une part à son poids P, dont la direction est celle dans laquelle on compte les abscisses positives, d'autre part à la

Fig. 18.



réaction F, dont la direction est inverse; donc l'équation du mouvement de ce corps est

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = P - F.$$

Soit l l'allongement statique correspondant à la force P, allongement donné, comme nous le savons, par l'équation

$$P = E\frac{\Omega}{L}l;$$

on a

$$F = \frac{P}{l}x.$$

En introduisant cette valeur de F dans l'équation du mouvement et divisant les deux termes de cette équation par m ou $\frac{P}{g}$, il vient

$$(1)\qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{g}{l}(l - x).$$

L'intégration de cette équation se ramène aisément à des

quadratures, comme nous l'avons vu en Cinématique. On peut aussi faire usage du raisonnement très-simple que voici.

A partir du point O, extrémité de la tige à l'état naturel, prenons une longueur $OS = l$, l'équation (1) signifie que l'accélération du point P est à chaque instant proportionnelle à la distance qui sépare ce point du point fixe S.

Cette loi est identique avec celle qui régit le mouvement de la projection d'un point qui se meut sur un cercle d'un mouvement uniforme. Il y aura donc parité entre les deux mouvements, si l'on se place dans les mêmes conditions initiales.

Or les lois du mouvement oscillatoire auquel nous faisons allusion sont fournies par les équations suivantes, qui ont été établies en Cinématique :

$$(2)\qquad \begin{cases} x = R(1 - \cos\omega t), \\ v = \omega R \sin\omega t, \\ j = \omega^2 R \cos\omega t = \omega^2 (R - x). \end{cases}$$

Si donc le poids P a été abandonné à lui-même sans vitesse initiale, les équations de son mouvement auront la même forme que les équations (2), et l'on établira l'identité en posant

$$R = l, \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

On conclut de là les résultats suivants :

1° L'amplitude de l'excursion de la tige est égale à $2l$, de sorte que l'allongement maximum est double de l'allongement statique;

2° Le temps d'une demi-oscillation est celui qu'un mobile, animé de la vitesse angulaire ω, met à parcourir une demi-circonférence; donc

$$(3)\qquad T = \frac{\pi}{\omega} = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

On reconnaît la formule bien connue qui donne la durée des petites oscillations du pendule simple. Donc :

Théorème. — *Une tige élastique chargée brusquement d'un poids que l'on abandonne à lui-même sans vitesse initiale*

oscille comme un pendule dont la longueur serait égale à l'allongement statique qui correspond à la charge de la tige.

On évite ces effets fâcheux en soutenant le poids et en ne l'abandonnant que petit à petit à lui-même. On obtient ce résultat, dans l'opération importante du décintrement des voûtes, en faisant reposer les poteaux qui supportent les cintres sur des sacs ou caisses de sable, qu'on vide aussi lentement qu'on le veut.

Cas où la vitesse initiale n'est pas nulle. — Le danger serait encore plus grand si, lors de la mise en charge, on communiquait au poids P une vitesse initiale v_0; par exemple, si, au lieu de poser simplement ce corps sur son support, on l'y jetait brusquement, de manière à produire un choc. L'équation différentielle (1) et les intégrales générales conserveraient la même forme, seulement le point O ne correspondrait plus à l'extrémité du diamètre du cercle, mais bien à un point M déterminé de manière que la vitesse du point décrivant eût sur la direction AD une projection égale à v_0.

Les équations du mouvement prendraient alors la forme

$$(4)\qquad \begin{cases} x = l - R\cos\omega t, \\ v = \omega R \sin\omega t, \\ j = \omega^2 R\cos\omega t = \omega^2(l - x), \end{cases}$$

le temps étant toujours supposé compté à dater de la fin d'une oscillation.

La valeur de ω et l'expression (3) de T resteraient les mêmes; mais on n'aurait plus $R = l$. Pour trouver un point du cercle dont le centre reste toujours en S, il faut remarquer que les ordonnées du cercle sont les quotients respectifs par ω des vitesses des pieds de ces ordonnées; par suite, comme on connaît la vitesse v_0, qui correspond au point O, on a, pour l'ordonnée OM,

$$y_0 = \frac{v_0}{\omega} = v_0\sqrt{\frac{l}{g}},$$

et pour le rayon SM,

$$R = \sqrt{l^2 + y_0^2} = l\sqrt{1 + \frac{v_0^2}{gl}}.$$

On conclut de là l'amplitude de l'oscillation, laquelle est

maintenant égale à $2R$, ou à

$$2l\sqrt{1+\frac{v_0^2}{gl}};$$

quant à la durée de l'oscillation, nous avons vu qu'elle n'est pas changée et qu'elle dépend uniquement de la charge de la tige.

On voit combien une mise en charge brusque peut amener aisément la rupture ou l'altération d'une verge sous l'action d'un poids bien inférieur à celui qui produirait la rupture statique. Les résultats seraient encore bien plus fâcheux, si l'on procédait par une série de chocs convenablement réglés (*). Comme il n'est pas possible d'empêcher des effets de ce genre de se produire dans une construction abandonnée à elle-même, il est de la plus stricte prudence de donner à la charge permanente une valeur inférieure à la charge de rupture. Dans les machines, les vibrations des diverses pièces nuisent, en outre, à la précision du jeu de la machine; on atténue cet inconvénient en employant des pièces massives, et en reliant le bâti de la machine à des fondations résistantes.

Des ressorts de choc. — Quand il n'est pas possible d'éviter les chocs dans une machine ou dans une construction, on les amortit en les recevant sur un corps élastique, sur un *ressort*. Les wagons ont non-seulement des ressorts de suspension comme les voitures ordinaires, non-seulement des ressorts de choc pour amortir les chocs accidentels, mais encore des ressorts de traction, contre les chocs qui se produisent d'une manière régulière, lors de la mise en marche ou de l'arrêt du train. Les ressorts affectent différentes formes; mais les lois précédentes s'appliquent à peu près aux ressorts de tous genres.

Il est naturel de prendre, pour mesure de l'intensité du choc, la demi-force vive

$$\frac{Pv_0^2}{2g}=T,$$

(*) Savart ayant fixé dans un étau une verge de laiton de $1^m,40$ de longueur et de 35 millimètres de diamètre, et l'ayant fait vibrer dans le sens de sa longueur, s'assura, au moyen d'un sphéromètre, sur lequel venait frapper l'extrémité libre de la barre, que l'amplitude des oscillations était au moins de $\frac{13}{10}$ de millimètre. Il aurait fallu 1700 kilogrammes pour produire un pareil allongement à l'état statique.

qui doit être détruite par les réactions moléculaires sans que la structure et les propriétés du ressort soient altérées.

Or la tension maxima de la tige, qui correspond au maximum d'allongement,

$$\lambda = l + R = l\left(1 + \sqrt{1 + \frac{v_0^2}{gl}}\right),$$

est

$$F = P\left(1 + \sqrt{1 + \frac{v_0^2}{gl}}\right).$$

Poncelet (*) appelle *résistance vive* d'un prisme le travail

$$\int_0^\lambda F\,dx$$

que l'élasticité d'un prisme solide oppose à l'action d'un choc dirigé dans le sens de son axe. Il nomme plus spécialement *résistance vive d'élasticité* le travail qui répond à l'intervalle où, l'élasticité étant parfaite, les allongements demeurent proportionnels aux efforts de réaction correspondants, et *résistance vive de rupture* celle qui a été développée par ces efforts au moment où ils ont atteint leur plus grande valeur et où le prisme se trouve rompu.

On peut avoir l'expression algébrique de la résistance vive d'élasticité, puisqu'on connaît, entre les deux limites de l'intégrale, la forme de la fonction F, laquelle est donnée par la relation

$$F = \frac{P}{l}x,$$

de laquelle on conclut

$$\int_0^{\lambda_1} F\,dx = \frac{P\lambda_1^2}{2l} = \frac{1}{2}F_1\lambda_1,$$

λ_1 étant l'allongement qui répond à la limite d'élasticité

$$F_1 = \frac{P\lambda_1}{l}.$$

La grandeur de l'intégrale $\int_0^{\lambda_1} F\,dx$, qui permet de comparer

(*) Introduction à la *Mécanique industrielle*, 3e édition, p. 313.

l'un à l'autre deux ressorts de choc, est proportionnelle au produit de la résistance par la grandeur de la déformation; on devra donc préférer les ressorts qui, pour une résistance donnée, cèdent plus que les autres à l'action, les ressorts les moins roides, en un mot.

Dans le cas qui nous occupe, la tige est alternativement étirée et comprimée; le maximum de compression est

$$\lambda' = R - l = l\left(\sqrt{1 + \frac{v_0^2}{gl}} - 1\right).$$

CHAPITRE IV.

DYNAMIQUE SPÉCIALE DES SOLIDES INVARIABLES.

§ XIII. — Application des théorèmes généraux au cas d'un corps solide.

On sait qu'on obtient les équations nécessaires et suffisantes pour déterminer le mouvement d'un système quelconque, en écrivant que la somme des travaux des forces extérieures et des forces d'inertie est nulle, pour tous les déplacements virtuels compatibles avec les liaisons du système. Dans le cas d'un corps solide libre, les mouvements possibles sont au nombre de six, savoir : trois translations s'effectuant parallèlement à trois axes rectangulaires fixes quelconques, et trois rotations autour des mêmes axes. Les équations du mouvement d'un corps solide libre sont donc également au nombre de six : trois de ces équations s'obtiennent en égalant à zéro les sommes des projections des forces extérieures et des forces d'inertie sur les trois axes, et les trois autres en égalant à zéro les sommes des moments des forces autour des mêmes axes (*).

(*) Il résulte de là que des forces quelconques, appliquées aux divers points d'un solide invariable, peuvent toujours être remplacées par un système *équivalent*, aussi bien dans le cas du mouvement que dans celui de l'équilibre.

Ce résultat est une conséquence immédiate de la règle qui réduit la recherche des lois du mouvement des corps à celle des lois de leur équilibre. Toute substitution qui n'altérera pas les sommes de projections et les sommes de moments des forces extérieures ne produira aucun changement dans les équations du mouvement d'un solide, pas plus que dans celles de son équilibre.

S'il s'agissait d'un système non solide, la substitution des deux groupes de forces l'un à l'autre dans les six équations générales serait encore parfaitement licite; mais cette opération modifierait les autres équations qu'il faut joindre à celles-là pour avoir toutes les équations du problème. Par suite, elle aurait généralement pour effet de détruire l'équilibre s'il existait, ou, dans le cas contraire, de modifier le mouvement.

Nous connaissons déjà ces six équations, qui s'appliquent à un système quelconque, et qui nous ont fourni des théorèmes intéressants. Dans le cas d'un corps solide, ces équations sont suffisantes et font connaître toutes les propriétés du mouvement qu'on se propose d'étudier (*).

Pour déterminer le mouvement d'un solide libre, soumis à des forces données, la méthode ordinaire consiste à décomposer ce mouvement en deux, conformément à ce qui a été dit en Cinématique, et à rechercher séparément :

1° Le mouvement du centre de gravité du corps;

2° Le mouvement du corps par rapport à trois axes attachés à son centre de gravité et animés d'un mouvement de translation dont la vitesse est à chaque instant celle de ce point.

Mouvement du centre de gravité. — Le mouvement du centre de gravité est produit par la résultante de translation de toutes les forces données, supposée appliquée à ce point. Rien n'est donc plus facile que de former les équations qui répondent à la première partie de notre problème.

Si le corps avait un point fixe ou un axe fixe, les équations du mouvement du centre de gravité contiendraient, outre les forces données, les réactions inconnues des appuis. Mais, dans ce cas, la considération du mouvement du centre de gravité ne présente aucun intérêt : le mouvement du solide se réduit à une pure rotation, qu'on détermine comme nous le verrons tout à l'heure.

Mouvement autour du centre de gravité. — Nous avons dit que, lorsqu'il s'agit d'un corps solide, toutes les forces fictives égales et opposées aux forces d'entraînement des divers points du système peuvent être remplacées par leur résultante, laquelle passe au centre de gravité, où elle est détruite.

On peut donc étudier le mouvement d'un solide par rapport à trois axes passant au centre de gravité et se mouvant parallèlement à eux-mêmes, sans ajouter aux forces réelles aucune force fictive, absolument comme si l'origine était fixe. C'est ce qu'on énonce en abrégé de la manière suivante :

(*) La question se simplifie quand le solide n'est pas libre, le nombre des mouvements possibles diminue plus ou moins, et celui des équations du mouvement subit une égale réduction.

Théorème. — *Un corps solide tourne autour de son centre de gravité, comme s'il était fixe.*

Ainsi se trouve nettement posée la question de la détermination du mouvement d'un corps solide soumis à l'action de forces données.

Si le corps ne possède aucun point fixe, nous transporterons toutes les forces au centre de gravité, et nous les remplacerons par le système équivalent composé de la résultante de translation F et du couple K résultant de tous les couples introduits par le transport des forces au centre de gravité. Cela fait, et le mouvement du centre de gravité étant déterminé comme nous le savons, nous serons ramené à chercher le mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe, sous l'influence du couple K, la force F n'ayant aucune action dans le mouvement relatif.

Quand un des points du corps est fixe, c'est relativement à ce point qu'il faut opérer la réduction des forces données à une force F et à un couple K'. Puis, négligeant la force F, qui a pour unique effet de charger le point fixe, nous nous retrouverons, comme précédemment, en présence du problème qui consiste à déterminer le mouvement d'un solide autour d'un point fixe, sous l'influence d'un couple donné.

Rotation autour d'un axe fixe.

Occupons-nous donc de chercher quel est l'effet produit par un couple sur un corps mobile autour d'un point fixe.

Pour cela, nous commencerons par étudier le cas où le corps n'a que la faculté de tourner autour d'un axe fixe. Le problème est ainsi beaucoup simplifié. En effet, le couple K ne peut, en aucune façon, changer la direction de l'axe de la rotation instantanée, et nous savons tout de suite que l'effet de ce couple sur le corps en mouvement doit se réduire à lui communiquer une certaine accélération angulaire, positive ou négative.

Le principe de d'Alembert nous fournit immédiatement l'équation unique qui fait connaître cette accélération angulaire. En effet, le seul mouvement virtuel compatible avec les liaisons est une rotation autour de l'axe fixe; par suite,

nous n'avons qu'une seule équation d'équilibre à écrire : celle qu'on obtient en égalant à zéro la somme des moments des forces extérieures et des forces d'inertie, pris par rapport à l'axe.

Mais la force d'inertie de chaque point est la résultante de deux forces, dont l'une, la force centrifuge, est dirigée vers l'axe et possède à chaque instant un moment nul; il n'y a donc à tenir lieu, pour chaque point, que de la force d'inertie tangentielle, dont l'expression est

$$m\frac{dv}{dt}, \quad \text{ou} \quad mr\frac{d\omega}{dt},$$

et dont la direction est inverse de celle du mouvement.

Or on a, pour le moment de cette force, affecté d'un signe convenable

$$-mr^2\frac{d\omega}{dt};$$

la somme des moments des forces d'inertie autour de l'axe de rotation est donc

$$-\frac{d\omega}{dt}\Sigma mr^2;$$

et si l'on désigne par N la somme des moments des forces extérieures autour du même axe, somme qui est la projection sur cet axe de l'axe du couple K, on a pour l'équilibre des forces réelles et fictives l'équation

$$N-\frac{d\omega}{dt}\Sigma mr^2=0,$$

de laquelle on tire

$$(1) \qquad \frac{d\omega}{dt}=\frac{N}{\Sigma mr^2}.$$

Donc :

Théorème. — *L'accélération angulaire d'un corps qui tourne autour d'un axe fixe est égale au quotient de la somme des moments des forces extérieures par le moment d'inertie* (*).

(*) On trouve de la même manière l'accroissement fini de vitesse angulaire résultant d'une percussion P. En effet, soit F une force quelconque située à une

Si nous comparons cette équation à celle du mouvement rectiligne

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}, \qquad (2)$$

dans laquelle F représente la somme des projections de toutes les forces sur la direction du mouvement, nous voyons que l'équation (1), comme l'équation (2), renferme une accélération au premier membre, et que le second membre est une fraction qui renferme les forces au numérateur, les masses au dénominateur; seulement, dans le cas de la rotation, chacune des forces telles que F est affectée d'un facteur qui est son bras de levier, et chacune des masses m est multipliée par le carré de sa distance à l'axe, laquelle est un élément très-important à considérer dans la théorie de la rotation des corps : plus les distances r augmenteront, plus le dénominateur Σmr^2 sera grand, et par conséquent plus l'accélération angulaire diminuera.

J'ai dit que, l'axe étant supposé fixe d'une manière absolue, l'effet des forces agissant sur le corps mobile ne pouvait être que la production d'une accélération angulaire, que nous venons d'apprendre à calculer. Mais il est évident qu'en outre ces forces, impuissantes à changer la direction de l'axe, exercent sur les appuis de cet axe des pressions dont il importe de calculer la grandeur. C'est ce que nous allons faire après une digression indispensable sur les propriétés des moments d'inertie et de certaines sommes analogues qui doivent être étendues au solide tout entier.

---

distance h de l'axe fixe; on a

$$d\omega \Sigma mr^2 = F h dt.$$

Intégrant de o à θ, en supposant que la direction de la force et sa distance à l'axe soient constantes entre les limites de l'intégrale, et faisant

$$P = \int_0^\theta F dt,$$

il vient

$$\Sigma mr^2(\omega - \omega_0) = Ph.$$

§ XIV. — Théorie des moments d'inertie.

Les sommes connues sous le nom de *moments d'inertie* jouent un rôle important dans la théorie de la rotation des corps solides. Elles jouissent d'un grand nombre de propriétés fort curieuses qu'il est indispensable d'énumérer ici, mais sur lesquelles je m'étendrai peu, pour ne pas empiéter sur le domaine de l'Analyse.

Nous avons vu que la somme des moments des forces d'inertie, par rapport à l'axe de rotation, est égale en valeur absolue au produit de l'accélération angulaire par le moment d'inertie. Remarquons encore que :

1° La somme des moments des quantités de mouvement par rapport à l'axe de rotation est

$$\Sigma mvr = \Sigma m\omega r^2 = \omega \Sigma mr^2.$$

Donc : *La somme des moments des quantités de mouvement d'un corps tournant, prise autour de l'axe de rotation, est égale au produit de la vitesse angulaire par le moment d'inertie.*

2° En second lieu, l'expression de la force vive est

$$\Sigma mv^2 = \Sigma m\omega^2 r^2 = \omega^2 \Sigma mr^2.$$

Donc : *La force vive d'un corps qui tourne autour d'un axe est égale au produit du moment d'inertie par le carré de la vitesse angulaire.*

Calcul des moments d'inertie. — La sommation que nous avons indiquée par le signe Σ, dans l'expression Σmr^2, doit être étendue à toutes les molécules qui composent le solide considéré.

On regarde habituellement ces molécules comme séparées les unes des autres par des intervalles qui, bien qu'extrêmement petits, sont néanmoins très-grands par rapport aux dimensions de ces mêmes molécules : on admet ainsi qu'il n'y a pas continuité dans la matière qui constitue les corps.

Cependant, pour appliquer le calcul au mouvement d'un solide, tant qu'on ne considère que l'action des forces exté-

rieures, on conçoit ordinairement une répartition uniforme de la matière dans la totalité du volume occupé par le corps, de sorte que, dans toute partie *très-petite* de ce volume apparent, partie renfermant toutefois un grand nombre de molécules, il y ait la même quantité de matière qu'auparavant. Comme les forces extérieures ne varient pas sensiblement d'une molécule à la molécule voisine, il n'en résultera aucune erreur appréciable dans les actions exercées sur les différentes parties du corps.

N'oublions pas toutefois que cette conception est entachée d'erreur; en effet, quand on parle d'un volume *infiniment petit*, ce volume doit pouvoir décroître au-dessous de toute limite, quelque petite qu'elle soit, c'est-à-dire au-dessous des dimensions finies des molécules et de l'intervalle qui les sépare. Peut-être trouvera-t-on dans cette indication l'explication de certains phénomènes délicats de la *Mécanique moléculaire*, science qui est encore à créer.

Quoi qu'il en soit, si l'on admet l'hypothèse de la continuité de la matière, le moment d'inertie est une intégrale triple de la forme

$$\iiint r^2 dm,$$

qu'on calculera, pour chaque corps ou portion de corps, par les procédés rigoureux ou approximatifs que l'on connaît. Nous verrons plus loin comment on détermine expérimentalement le moment d'inertie d'un corps qui n'est pas limité par des surfaces susceptibles d'une définition géométrique.

Rayon de giration. — Le moment d'inertie Σmr^2 d'un solide par rapport à une droite OI étant calculé, déterminons une longueur R par la condition

$$MR^2 = \Sigma mr^2,$$

M étant la masse totale du solide : la ligne R est ce qu'on nomme le *rayon de giration* du solide, par rapport à la droite OI. Dans le cas d'un solide homogène, le rayon de giration est une quantité purement géométrique.

Étant donné un solide, les moments d'inertie de ce corps par rapport aux diverses droites qu'on peut considérer comme axes de rotation ne sont pas tous indépendants; et nous allons

voir que trois d'entre eux, convenablement choisis, peuvent nous faire connaître tous les autres. C'est ce qui résulte des deux théorèmes suivants :

Théorème I. — *Le moment d'inertie autour d'un axe quelconque est égal au moment d'inertie autour d'un axe parallèle mené par le centre de gravité, plus le moment d'inertie de la masse entière transportée au centre de gravité.*

Cette propriété est une conséquence immédiate de la relation que nous avons donnée (p. 94) entre la force vive réelle et la force vive qui correspond au mouvement autour du centre de gravité supposé fixe (*). En désignant par H le moment d'inertie autour d'un axe passant par le centre de gravité, par H' le moment d'inertie autour d'un axe parallèle, situé à la distance D du premier, on a

$$(1) \qquad H' = H + MD^2,$$

ou, en employant la notation du rayon de giration,

$$(2) \qquad R'^2 = R^2 + D^2.$$

Scolie. — De toutes les droites parallèles à une direction donnée, celle par rapport à laquelle le moment d'inertie est le plus petit passe au centre de gravité.

Théorème II. — *Si, sur les différents axes qui se croisent en un même point, on porte des longueurs inversement proportionnelles aux racines carrées des moments d'inertie correspondants, le lieu des points ainsi déterminés est un ellipsoïde.*

Prenons trois axes rectangulaires quelconques, et soient λ, μ, ν les angles qui définissent la direction de l'axe par rapport auquel on demande le moment d'inertie. Le carré de la distance à cet axe du point dont les coordonnées sont x, y, z a pour expression

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (x\cos\lambda + y\cos\mu + z\cos\nu)^2;$$

(*) On sait, par la Cinématique, que, dans les différentes manières de décomposer le mouvement d'un solide en une translation et une rotation, la ligne qui représente la rotation reste invariable, en grandeur et en direction.

donc

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} \Sigma mr^2 = {} & A\cos^2\lambda + B\cos^2\mu + C\cos^2\nu \\ & -2\alpha\cos\mu\cos\nu - 2\beta\cos\nu\cos\lambda - 2\gamma\cos\lambda\cos\mu, \end{aligned} \right.$$

en faisant

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} A &= \Sigma m(y^2+z^2), & \alpha &= \Sigma myz, \\ B &= \Sigma m(z^2+x^2), & \beta &= \Sigma mzx, \\ C &= \Sigma m(x^2+y^2), & \gamma &= \Sigma mxy. \end{aligned} \right.$$

L'équation (3) donne la relation qui existe entre les moments d'inertie relatifs à tous les axes qui se croisent en un point quelconque. On exprime cette loi sous une forme géométrique élégante, en portant, sur chaque axe (λ, μ, ν), une longueur réciproque de la racine carrée du moment d'inertie correspondant.

Faisons en effet dans l'équation (3)

$$\Sigma mr^2 = \frac{1}{u^2},$$

et désignons par x, y, z les coordonnées $u\cos\lambda$, $u\cos\mu$, $u\cos\nu$, du point déterminé par la construction indiquée; on trouve, pour représenter le lieu géométrique de ce point, l'équation

$$(5)\qquad Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2\alpha yz - 2\beta zy - 2\gamma xy = 1.$$

Cette équation représente un ellipsoïde connu sous le nom d'*ellipsoïde d'inertie*, ou d'*ellipsoïde central*.

La considération de cet ellipsoïde permet de donner une forme très-remarquable à tous les résultats de la théorie que nous exposons actuellement.

Axes principaux d'inertie. — Un ellipsoïde quelconque a toujours trois axes principaux rectangulaires par rapport auxquels son équation est de la forme

$$(6)\qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

ou, en coordonnées polaires,

$$(7)\qquad \frac{1}{u^2} = \frac{\cos^2\lambda}{a^2} + \frac{\cos^2\mu}{b^2} + \frac{\cos^2\nu}{c^2}.$$

Il suit de là que, A, B, C étant les moments particuliers du solide autour des axes de l'ellipsoïde d'inertie, on a, pour le moment autour d'un axe passant au même point, et défini par les angles λ, μ, ν,

$$\text{(8)} \qquad \text{H} = \text{A}\cos^2\lambda + \text{B}\cos^2\mu + \text{C}\cos^2\nu,$$

puisque, par définition, les quantités H, A, B, C sont proportionnelles respectivement à $\frac{1}{u^2}$, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{b^2}$, $\frac{1}{c^2}$.

Les axes de l'ellipsoïde central s'appellent *axes principaux d'inertie* du solide, pour le point considéré (*).

Propriétés des axes et des moments principaux. — 1° Si x, y, z désignent les coordonnées des divers points du corps par rapport à un système d'axes principaux, on a les trois équations

$$\Sigma myz = 0, \quad \Sigma mzx = 0, \quad \Sigma mxy = 0,$$

qui peuvent servir à définir les axes principaux.

2° Si l'on avait seulement

$$\Sigma myz = 0, \quad \Sigma mzx = 0,$$

l'axe des z serait un axe principal, relativement au point pris pour origine.

3° Si l'on demande quelle est la condition nécessaire pour qu'il existe quelque part sur une droite Oz un point pour lequel cette droite soit axe principal, on trouve qu'en prenant pour plan des zx le plan qui contient la droite donnée et le centre de gravité, on doit avoir

$$\Sigma myz = 0.$$

Alors cette équation est vraie pour un système quelconque d'axes parallèles aux axes coordonnés, ayant pour origine un

---

(*) L'existence et les propriétés essentielles des axes principaux d'inertie étaient connus bien avant que Poinsot ait eu l'idée si heureuse de l'ellipsoïde central. La priorité de la découverte de cet ellipsoïde est disputée à Poinsot par Cauchy, qui, d'après le témoignage de M. Saint-Guilhem, l'enseignait en 1824 à l'École Polytechnique (voir *Théorie nouvelle de l'équilibre et du mouvement des corps*, par M. Saint-Guilhem, 1837, p. 71).

point de l'axe des z; de plus, si l'on désigne par a la distance du centre de gravité à cet axe, et si l'on se transporte au point dont la distance à la nouvelle origine est

$$\zeta = \frac{\Sigma m z x}{M a},$$

on trouve

$$\Sigma m z x' = 0,$$

et l'axe des z se trouve axe principal pour ce point.

4° Si la droite donnée contient le centre de gravité, on a $\zeta = 0$, et la formule ne s'applique plus. Les axes principaux relatifs au centre de gravité d'un corps jouissent de la propriété remarquable d'être des axes principaux relativement à un quelconque de leurs points, et d'avoir pour conjugués des axes parallèles à ceux qui se rapportent au centre de gravité.

Tout axe parallèle à un de ces axes principaux du centre de gravité est lui-même axe principal relativement au point où il perce le plan des deux autres.

5° Soit

$$A < B < C;$$

A est la plus petite valeur que puisse prendre le moment d'inertie H, C est la plus grande. Ainsi, les trois axes principaux répondent, l'un au moment d'inertie minimum, l'autre au moment maximum; le troisième n'est pas unique, comme les deux premiers, et il y a une infinité d'axes du moyen moment d'inertie B.

Ces axes forment deux plans conduits par l'axe principal du moment B. Ce sont les plans des sections circulaires; leur inclinaison sur le plan des zx est donnée par la formule

$$\text{(9)} \qquad \frac{z}{x} = \pm\sqrt{\frac{B - A}{C - A}}.$$

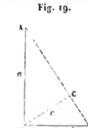
6° De l'expression (8) de H il résulte que, si deux corps avaient les mêmes moments d'inertie A, B, C, par rapport à leurs axes principaux, ces deux corps auraient aussi même moment d'inertie par rapport à toute autre droite passant au point de rencontre de ces trois axes. Donc, quand on ne con-

sidère que les moments d'inertie, on peut toujours faire abstraction de la figure des corps, ou plutôt les réduire à quelque autre forme plus simple, ayant les mêmes moments principaux.

7° Un ellipsoïde quelconque ne peut être considéré comme l'ellipsoïde central d'un corps.

Soient OA et OB (*fig.* 19) le plus grand axe et l'axe moyen,

Fig. 19.



le plus petit est toujours plus grand que la hauteur OC du triangle rectangle fait sur a et b comme côtés, ce qu'exprime l'équation

$$c > \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

ou

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} > \frac{1}{c^2}.$$

Si l'ellipsoïde est de révolution autour de son petit axe, l'aplatissement a pour limite

$$c = \frac{a}{\sqrt{2}}, \quad \frac{a - c}{a} = 0,293 \text{ (*)}.$$

(*) *Moments d'inertie des corps qui se rencontrent le plus fréquemment dans les organes des machines.* — Nous ne considérerons que des corps homogènes, et nous donnerons, au lieu des moments d'inertie, les rayons de giration.

1° *Droite pesante* de longueur l, tournant autour d'un axe passant par son extrémité, et avec lequel elle fait un angle α,

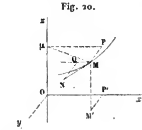
$$R^2 = \tfrac{1}{3} l^2 \sin^2 \alpha :$$

l'ellipsoïde central est un ellipsoïde de révolution indéfiniment allongé;

§ XV. — Pressions sur les appuis d'un corps qui tourne autour d'un axe maintenu fixe.

Prenons l'axe de rotation du corps pour axe des z, plaçons l'origine en un point quelconque O de cet axe (*fig.* 20), enfin

Fig. 20.



laissons les axes des x et des y quelconques, mais perpendiculaires entre eux et à l'axe Oz.

2° *Cylindre* de rayon ρ et de longueur l, autour de son axe,

$$R^2 = \tfrac{1}{2}\rho^2;$$

3° *Cylindre* de rayon ρ et de longueur l, autour d'un rayon d'une de ses bases,

$$R^2 = \tfrac{1}{3}l^2 + \tfrac{1}{4}\rho^2;$$

4° *Cylindre creux :*

$$R^2 = \tfrac{1}{2}(\rho^2 + \rho'^2),$$

ou, en désignant par e l'épaisseur, par ρ_1 le rayon moyen :

$$R^2 = \rho_1^2 + \tfrac{1}{4}e^2;$$

5° *Sphère pleine :*

$$R^2 = \tfrac{2}{5}\rho^2;$$

6° *Parallélépipède rectangle* autour d'une parallèle à l'arête a, menée par le centre de gravité :

$$R^2 = \tfrac{1}{12}(b^2 + e^2).$$

Pour l'arête elle-même, il faudrait ajouter $\frac{1}{4}(b^2 + e^2)$, soit

$$R^2 = \tfrac{1}{3}(b^2 + e^2);$$

7° *Tore* autour de son axe :

$$R^2 = \delta^2 + \tfrac{3}{4}\rho^2 \,(\text{maxima});$$

autour d'une perpendiculaire :

$$R^2 = \frac{\delta^2}{2} + \tfrac{5}{8}\rho^2.$$

Le volume du tore est $2\pi^2\rho^2\delta$.

Proposons-nous d'abord de chercher l'axe du couple résultant des quantités de mouvement, relativement à l'origine O.

Désignons ce couple par G; nous avons déjà trouvé

$$G_z = \omega \Sigma mr^2 = C\omega,$$

en posant, comme dans le paragraphe précédent,

$$(1)\qquad \begin{cases} A = \Sigma m(y^2+z^2), & \alpha = \Sigma myz, \\ B = \Sigma m(z^2+x^2), & \beta = \Sigma mzx, \\ C = \Sigma m(x^2+y^2), & \gamma = \Sigma mxy. \end{cases}$$

Pour avoir les couples relatifs aux axes Ox et Oy, décomposons la vitesse d'un point quelconque M en

$$v_x = -\omega y, \quad v_y = \omega x;$$

puis, faisant la somme des moments de ces quantités multipliées par la masse m correspondante, par rapport aux axes des x et des y respectivement, en ayant égard aux signes, il vient

$$G_x = -\omega \Sigma mxz, \quad G_y = -\omega \Sigma myz.$$

On a donc, en faisant usage des notations (1),

$$(2)\qquad G_x = -\beta\omega, \quad G_y = -\alpha\omega, \quad G_z = C\omega.$$

Or, si l'on se reporte à l'équation générale de l'ellipsoïde central (p. 123), on déduit des équations (2):

Théorème I. — *L'axe du couple résultant des quantités de mouvement est dirigé suivant la perpendiculaire au plan tangent à l'ellipsoïde central, mené au point où l'axe de rotation perce cet ellipsoïde.*

Ce qui revient à dire :

Théorème II. — *Le plan du couple résultant des quantités de mouvement est le plan conjugué de l'axe de rotation dans l'ellipsoïde central.*

Scolie. — *Quand l'axe de rotation est axe principal relativement à l'origine O, cet axe coïncide, en direction, avec l'axe du couple résultant des quantités de mouvement, et la grandeur de ce dernier axe est le produit de la vitesse angulaire par le moment d'inertie.*

Ces théorèmes sont indépendants de la fixité de l'axe; en effet, nous savons que les vitesses de tous les points d'un solide dont un point est fixe sont les mêmes que si le solide tournait effectivement autour d'une certaine droite, dite *axe instantané*. Donc, pour tous les calculs relatifs aux vitesses, il n'y a pas lieu de distinguer une rotation instantanée d'une rotation persistante.

L'axe de rotation étant supposé fixe, la direction de l'axe du couple résultant des quantités de mouvement est une ligne fixe dans le corps mobile. L'angle de ces deux directions est

$$(3) \qquad \cos i = \cos \overline{Gz} = \frac{C}{\sqrt{C^2 + \alpha^2 + \beta^2}}.$$

Enfin, la longueur G de l'axe du couple résultant a pour expression

$$G = \frac{C\omega}{\cos i} = \frac{\omega}{u^2 \cos i},$$

en désignant par u le rayon vecteur de l'ellipsoïde qui répond à l'axe de rotation; et, si l'on appelle h la longueur $u \cos i$ de la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent, on a

$$(4) \qquad G = \frac{\omega \cos i}{h^2},$$

quantité proportionnelle à ω.

Réduction des forces d'inertie.

Occupons-nous maintenant des forces d'inertie. La résultante de translation de ces forces est égale à la force d'inertie de la masse totale, supposée concentrée au centre de gravité. En prenant, pour plus de simplicité, le plan des zx passant par le centre de gravité, et désignant par a la distance de ce centre à l'axe de rotation, on a, pour les composantes de la résultante de translation,

$$(5) \qquad X' = M\omega^2 a, \quad Y' = -Ma\frac{d\omega}{dt}, \quad Z' = 0.$$

Pour que cette force soit nulle, c'est-à-dire que les forces

d'inertie se réduisent à un couple, il faut qu'on ait

$$a = 0,$$

c'est-à-dire que le corps soit centré.

Quant au couple résultant, nous savons que l'axe de ce couple est égal et directement opposé à la vitesse du point G. On a donc

$$L' = -\frac{dG_x}{dt} = \frac{d}{dt}\omega\Sigma mxz,$$

$$M' = -\frac{dG_y}{dt} = \frac{d}{dt}\omega\Sigma myz,$$

$$N' = -\frac{dG_z}{dt} = -\frac{d}{dt}\omega\Sigma mr^2.$$

Effectuons les différentiations, en remarquant que, pour chaque point, l'ordonnée z est une constante, ainsi que la distance r du point à l'axe; tandis que l'on a

$$\frac{dx}{dt} = -\omega y, \quad \frac{dy}{dt} = \omega x,$$

il vient

$$(6)\quad \begin{cases} L' = \dfrac{d\omega}{dt}\Sigma mxz - \omega^2\Sigma myz = \beta\dfrac{d\omega}{dt} - \alpha\omega^2, \\ M' = \dfrac{d\omega}{dt}\Sigma myz + \omega^2\Sigma mxz = \alpha\dfrac{d\omega}{dt} + \beta\omega^2, \\ N' = -\dfrac{d\omega}{dt}\Sigma mr^2 = -C\dfrac{d\omega}{dt}. \end{cases}$$

Cas d'une résultante unique. — Nous avons trouvé en Statique la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une force équivalente à un système de forces donné. Cette condition s'exprime d'une manière générale par l'équation

$$L'X' + M'Y' + N'Z' = 0,$$

qui devient, dans le cas des forces d'inertie,

$$-Ma\alpha\left[\omega^4 + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2\right] = 0.$$

On satisfait à cette équation de deux manières :

1° En posant

$$a = 0;$$

2° En posant

$$\alpha = 0.$$

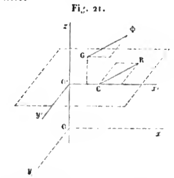
Mais la première solution doit être rejetée : elle répond aux cas où la force unique que nous cherchons est nulle et a son point d'application situé à l'infini ; ce qui revient à dire que les forces sont équivalentes à un couple. Ce cas a déjà été examiné. La condition d'une résultante unique est donc

$$\Sigma myz = 0,$$

équation que nous avons déjà rencontrée comme nécessaire et suffisante pour que la ligne Oz soit axe principal en l'un de ses points. Ainsi :

THÉORÈME. — *Pour que les forces d'inertie admettent une résultante unique, il faut que l'axe de rotation soit principal en un de ses points.*

Fig. 21.



Transportons l'origine au point O′ (*fig.* 21), relativement auquel l'axe des z est axe principal, nous avons alors

$$\Sigma myz' = 0, \quad \Sigma mzx' = 0,$$

relations d'où nous concluons

$$L' = 0, \quad M' = 0;$$

donc la résultante cherchée est dans le plan des $x'y'$, c'est-

à-dire dans le plan principal. Nous connaissons la grandeur et la direction de cette résultante égale à la force d'inertie $G\Phi$, dont les composantes ont les valeurs (5); il suffit d'avoir un point de cette force, par exemple le point C où elle rencontre l'axe $O'x'$.

Soit l la longueur O'C; le moment de la force R, par rapport à l'axe de rotation, est, en se reportant aux valeurs (5) des composantes X', Y', Z',

$$-Mal\frac{d\omega}{dt}.$$

D'un autre côté, puisque cette force est équivalente à toutes les forces d'inertie, son moment doit être égal à la somme des moments de toutes ces forces, soit à

$$\frac{d\omega}{dt}\Sigma mr^2;$$

donc

(7) $$l = -\frac{\Sigma mr^2}{Ma}.$$

Le point C ainsi déterminé s'appelle *centre de percussion.* Nous verrons plus tard la raison de cette dénomination, que j'introduis ici afin d'énoncer tout de suite sous sa forme ordinaire le théorème suivant :

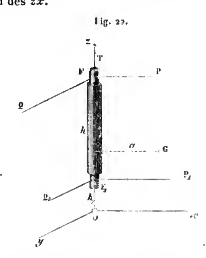
Théorème. — *Dans le cas où il existe une résultante unique des forces d'inertie, cette résultante passe au centre de percussion.*

Calcul des réactions des appuis de l'axe.

Considérons (*fig.* 22) un arbre tournant FF_1, *fixé* à la manière ordinaire aux deux points F et F_1, par tourillons et coussinets. Les réactions des supports comprennent une force T, appliquée en un point quelconque dans la direction de l'axe, pour empêcher son déplacement longitudinal, et des actions perpendiculaires à l'axe, exercées par les coussinets sur les tourillons. Si l'on néglige le frottement, ces dernières peuvent se décomposer chacune en deux forces, P et Q, P_1 et Q_1, parallèles respectivement à l'axe des x et à l'axe des y, et appliquées en des points définis de l'axe de rotation oz. Appelons h

et h_1 les hauteurs respectives des tourillons au-dessus du plan des xy, et enfin soit a l'abscisse du centre de gravité supposé dans le plan des zx.

Fig. 22.



Cela posé, les réactions des supports doivent détruire la force qui provient de la translation à l'origine des forces réelles et des forces d'inertie, ainsi que les deux couples correspondants. Écrivons les six équations de l'équilibre entre les forces appartenant à ces trois catégories :

$$
(8)\qquad \left\{
\begin{aligned}
& X + P + P_1 + M\omega^2 a = 0,\\
& Y + Q + Q_1 - Ma\frac{d\omega}{dt} = 0,\\
& Z + T = 0,\\
& L - Qh - Q_1 h_1 + \beta\frac{d\omega}{dt} - \alpha\omega^2 = 0,\\
& M + Ph + P_1 h_1 + \alpha\frac{d\omega}{dt} + \beta\omega^2 = 0,\\
& N - H\frac{d\omega}{dt} = 0,
\end{aligned}
\right.
$$

en posant $H = \Sigma mr^2$.

Conséquences. — 1° La troisième équation fait connaître la

pression longitudinale, laquelle est la même que dans l'état statique;

2° La sixième donne la loi du mouvement de rotation;

3° Enfin les quatre autres permettront de calculer P, P_1, Q, Q_1.

Axes permanents de rotation. — Supposons que le corps solide, au lieu d'avoir un axe fixe, n'ait qu'un point maintenu fixe, et qu'on ait choisi ce point pour origine. Supposons de plus qu'aucune force extérieure ne sollicite le corps, et cherchons les conditions pour que le mouvement, ayant commencé autour de l'axe des z, continue comme si cet axe était fixé invariablement.

Il est évident qu'il suffit pour cela que toutes les forces que l'axe fixe devait détruire se trouvent détruites par le point fixe seul; or ce point détruit les trois composantes P_1, Q_1, T, qui lui sont appliquées et qui peuvent avoir sans inconvénient des valeurs quelconques; mais on doit avoir

$$P = o, \quad Q = o.$$

En faisant, en outre, dans les équations (1), $h_1 = o$, on arrive aux conséquences suivantes :

1° Les trois premières équations donnent la charge du point fixe;

2° La quatrième et la cinquième deviennent

$$\beta \frac{d\omega}{dt} - \alpha\omega^2 = o,$$

$$\alpha \frac{d\omega}{dt} + \beta\omega^2 = o;$$

3° La sixième nous donne

$$\frac{d\omega}{dt} = o;$$

donc le mouvement est uniforme; les autres équations nous montrent qu'il faut avoir à la fois $\alpha = o$, $\beta = o$, c'est-à-dire qu'il faut que l'axe de rotation soit un axe principal d'inertie par rapport au point fixe. Les axes principaux d'inertie, à cause

de cette propriété, portent aussi le nom d'*axes permanents de rotation* (*).

Axes naturels de rotation. — Si de plus l'axe de rotation contient le centre de gravité (auquel cas il ne peut être principal en l'un de ses points sans l'être également pour tous les points de sa direction), on a

$$P_1 = 0, \quad Q_1 = 0,$$

c'est-à-dire que l'axe ne supporte aucun effort en aucun de ses points, et qu'il reste fixe de lui-même.

On appelle fréquemment les axes principaux relatifs au centre de gravité *axes naturels de rotation*, parce qu'ils sont les seuls autour desquels une rotation soit susceptible de se perpétuer indéfiniment, sans l'intervention d'aucun effet extérieur. Cette rotation peut d'ailleurs se combiner avec un mouvement de progression rectiligne et uniforme du centre de gravité, si ce point est animé d'une vitesse initiale.

Applications de la théorie des axes principaux.

Les supports des arbres tournants ne sauraient être fixes d'une manière absolue. Les efforts latéraux qui s'exercent sur les tourillons produisent des vibrations qui tendent à arracher les boulons de scellement, tout en nuisant beaucoup à la précision du travail de la machine. Des effets de ce genre se produisent toutes les fois que l'axe d'une roue pesante, tel qu'un volant de machine à vapeur, n'est pas axe principal d'inertie : alors la roue *ne tourne pas rond*, et au lieu de sembler immobile elle paraît soumise à des battements.

Équilibrage des meules de moulin. — Ces battements sont

(*) Quand l'axe de rotation n'est pas un axe principal d'inertie, et qu'on veut le maintenir dans une direction invariable, les formules (8) montrent qu'il faut, en l'absence d'un deuxième tourillon, exercer sur le corps deux couples L et M, déterminés par les relations

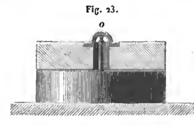
$$L + \beta \frac{d\omega}{dt} - \alpha\omega^2 = 0,$$

$$M + \alpha \frac{d\omega}{dt} + \beta\omega^2 = 0.$$

surtout visibles sur les corps qui, comme les meules de moulins à blé, n'ont qu'un seul point de leur axe fixe.

Un équipage de meules comprend une meule inférieure fixe, la *meule gisante* (*fig.* 23), au-dessus de laquelle se trouve une meule mobile, appelée *meule volante;* les grains sont

Fig. 23.



écrasés entre les deux. La meule volante tourne autour d'un axe, qui n'est fixé que par un seul point O. Une cavité est pratiquée dans le centre de cette meule; au-dessus est placée une crapaudine qui s'appuie sur un pivot, fixé lui-même à la meule gisante.

Cherchons la condition nécessaire pour que la meule ne ballotte pas en tournant, son axe restant parfaitement vertical pendant le mouvement.

Il faut d'abord que la meule soit bien centrée, c'est-à-dire que la distance a du centre de gravité à l'axe soit nulle.

Sous cette condition, la meule se tiendra parfaitement horizontale tant qu'elle restera en repos. Mais du moment qu'on vient à lui communiquer un mouvement de rotation, la condition de centrage ne suffit plus. Pour que l'axe de rotation conserve sa direction fixe, il faut encore que l'on ait

$$\Sigma mxz = 0, \quad \Sigma myz = 0,$$

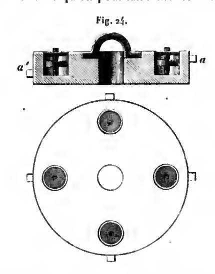
c'est-à-dire que la répartition des masses autour du centre de gravité doit être dans une certaine liaison avec les hauteurs respectives des masses.

Ordinairement cela n'a pas lieu, parce que les meules sont construites par assises de petits matériaux, comme une construction en moellons, et sont généralement loin d'être homogènes. Pour remédier à cet inconvénient, le procédé le plus simple consiste à creuser dans la meule volante quatre trous



en croix (*fig.* 24), et à placer dans chacun de ces trous une petite masse de fonte qu'on peut faire monter et descendre à

Fig. 24.



l'aide d'une vis. On arrive, après quelques tâtonnements, à donner à ces masses une position convenable.

On peut aussi placer à l'extérieur de petits contre-poids *a*, *a'*, dont on règle également la hauteur par tâtonnements.

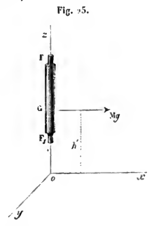
Les locomotives nous offrent des exemples de roues tournant autour d'un axe non principal, dans celles de leurs roues qui portent des boutons de manivelle servant d'articulations aux bielles motrices et aux bielles d'accouplement. Il résulte de cette circonstance et d'autres phénomènes du même genre des couples perturbateurs qui sollicitent l'essieu dans une direction variable; l'effet de ces couples est surtout nuisible quand ils sont situés dans le plan perpendiculaire à la voie, parce qu'ils tendent alors à soulever une des roues, et à lui faire franchir le niveau du rail, ce qui peut produire un déraillement (*).

(*) N'oublions pas que les forces d'inertie croissent comme les carrés des vitesses angulaires, et que ces vitesses atteignent aujourd'hui des grandeurs considérables, pour les locomotives et certaines machines fixes.

C'est pour cela qu'on arme les roues de contre-poids qu'on cherche à disposer de manière à atténuer autant que possible ces effets désastreux des forces d'inertie; mais l'équilibrage de ces forces ne paraît pas réalisable au moyen d'une disposition simple.

Expérience de M. Foucault. — Calculons au moyen de nos formules (8) les pressions qui s'exercent sur les supports d'une roue pesante, dont l'axe horizontal est un axe principal d'inertie, qui contient le centre de gravité G. La seule force extérieure est la pesanteur Mg, que nous prendrons parallèle à l'axe des x (*fig.* 25).

Fig. 25.



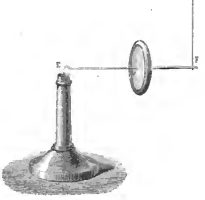
Conservons les mêmes notations que dans le cas général, et désignons par h' la hauteur du centre de gravité, au-dessus de l'origine. L'arbre étant maintenu fixe au moyen de deux supports quelconques placés en F et F_1, les relations (8) nous montrent que les actions de ces supports sont verticales et déterminées par les équations

$$(9) \qquad \left\{ \begin{array}{l} P + P_1 + Mg = 0, \\ Ph + P_1 h_1 + Mgh' = 0. \end{array} \right.$$

Ces équations sont les mêmes que si le corps était en repos, et le poids Mg se répartit entre les supports conformément aux règles de la Statique.

Pour vérifier ce résultat, faisons reposer l'extrémité E sur un appui fixe, dont nous indiquerons plus tard la disposition particulière (*fig.* 26), et soutenons l'extrémité F au moyen

Fig. 26.




d'un fil accroché au plateau d'une balance. On reconnaît, d'une part, que le fil ne tend nullement à dévier de la verticale; d'autre part, que le poids qu'il faut mettre dans le deuxième plateau de la balance, pour maintenir l'équilibre, est indépendant de l'état de repos ou de mouvement du corps.

Cela posé, M. Foucault a observé que, si l'on brûle le fil de manière à rendre brusquement la liberté à l'extrémité F, le corps ainsi placé en porte à faux ne tombe pas, seulement le point F décrit lentement un cercle horizontal autour du point resté fixe E (*). Nous expliquerons plus tard cette expérience remarquable; nous nous contenterons, pour le moment, de faire observer que notre calcul des forces d'inertie suppose essentiellement que l'axe reste fixe. Du moment qu'il n'en est

---

(*) Pour laisser à ce mouvement la liberté de se produire, le support est terminé par une sorte de godet, dans lequel repose un crochet fixé à l'axe FE. Cette disposition permet de donner à l'arbre une inclinaison quelconque, au moment de l'abandonner à lui-même; alors l'axe conserve cette inclinaison et décrit un cône de révolution autour de la verticale du point E.

plus ainsi, nos calculs et nos raisonnements ne signifient absolument rien et ne peuvent plus nous fournir la moindre indication sur les phénomènes.

§ XVI. — Rotation d'un corps autour d'un point fixe.

Le problème général qu'il s'agit de résoudre est le suivant: *Un corps solide, mobile autour d'un point* O, *et animé actuellement d'une rotation* OI, *est soumis à l'action d'un couple* K, *situé dans un plan quelconque; on demande de déterminer quels changements subiront dans la suite des temps la direction et la grandeur de la rotation instantanée.*

Pour chercher l'effet du couple, nous pouvons, en vertu du principe de Galilée, faire abstraction du mouvement acquis. Cela fait, nous ramènerons aisément le cas actuel au cas où le corps avait un axe fixe, en considérant d'abord un couple perpendiculaire à un axe principal.

Effet d'un couple situé dans un plan principal. — Quand un couple agit perpendiculairement à un axe principal maintenu fixe, N étant le moment de ce couple et H le moment d'inertie du solide, nous savons en premier lieu que le solide reçoit, pendant un élément de temps dt, une vitesse angulaire infiniment petite

$$(1) \qquad d\omega = \frac{N}{H}\,dt.$$

En deuxième lieu, si l'on calcule au moyen du principe de d'Alembert [ou des équations (8) que nous avons trouvées dans le cas où les forces extérieures sont quelconques] les efforts qui s'exercent sur les appuis fixes de l'axe, on trouve que, si l'axe est principal au point où il repose sur l'un de ces appuis, l'autre support n'est nullement chargé, pas plus que dans le cas où aucune force extérieure n'agissait.

Il suit de là que l'effet du couple est absolument indépendant de la présence ou de l'absence d'un deuxième support; et cet effet est de communiquer au solide une rotation donnée par l'équation (1) autour de l'axe du couple qui se fixe *spontanément*, en vertu de son caractère d'axe principal.

De là un premier résultat acquis à la théorie qui fait l'objet de ce paragraphe :

Théorème I. — *L'axe de la rotation produite par un couple situé dans un plan principal n'est autre chose que l'axe principal perpendiculaire au plan du couple.*

Effet d'un couple situé dans un plan quelconque. — Pour passer de ce premier cas à celui d'un couple quelconque, il suffit de décomposer le couple donné en trois, L, M, N, respectivement perpendiculaires aux trois axes principaux qui se croisent au point fixe O. Nous savons, par ce qui précède, déterminer l'effet de chacun des couples composants pris isolément; et, cela fait, toujours en vertu du principe de Galilée, nous obtiendrons l'effet total en composant, suivant les règles de la Cinématique, les mouvements dus à chacun des couples partiels.

Soient A, B, C les moments d'inertie principaux, les rotations produites par les trois couples L, M, N auront pour valeurs respectivement

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} d\omega_1 &= \frac{L}{A}\,dt,\\ d\omega_2 &= \frac{M}{B}\,dt,\\ d\omega_3 &= \frac{N}{C}\,dt.\end{aligned}\right.$$

Par suite, la rotation réelle sera donnée par l'expression

$$(3)\qquad d\omega = \sqrt{d\omega_1^2 + d\omega_2^2 + d\omega_3^2} = dt\sqrt{\frac{L^2}{A^2} + \frac{M^2}{B^2} + \frac{N^2}{C^2}},$$

et l'axe de cette rotation fait avec les trois axes principaux des angles dont les cosinus sont proportionnels à

$$\frac{L}{A},\quad \frac{M}{B},\quad \frac{N}{C}.$$

Ce résultat est susceptible d'un énoncé fort élégant, en introduisant la notion de l'ellipsoïde central du corps.

En effet, l'équation de cet ellipsoïde, par rapport aux trois axes principaux du point O : Ox, Oy, Oz, est

$$Ax_1^2 + By_1^2 + Cz_1^2 = 1.$$

Or, si nous considérons le plan du couple défini par les quantités L, M, N, proportionnelles aux cosinus des angles faits par la perpendiculaire à ce plan avec les trois axes de l'ellipsoïde, il résulte de la théorie des surfaces du second ordre que $\frac{L}{A}, \frac{M}{B}, \frac{N}{C}$ sont proportionnels aux cosinus des angles faits avec les mêmes axes par le diamètre conjugué au plan (L, M, N). Donc :

Théorème II. — *L'axe de la rotation produite par un couple situé dans un plan quelconque coïncide avec le diamètre conjugué du plan du couple, dans l'ellipsoïde central.*

Effet d'une percussion. — Si l'on considère un solide en repos, *frappé* subitement par un couple dont l'action ne dure qu'un espace de temps très-court, on trouve la rotation finie qui résulte de l'action de ce couple, en intégrant les équations (2) entre deux limites contenant la durée totale de la percussion.

On a

$$(4)\quad \begin{cases} \omega_1 = \dfrac{\int_0^\theta L\,dt}{A}, \\ \omega_2 = \dfrac{\int_0^\theta M\,dt}{B}, \\ \omega_3 = \dfrac{\int_0^\theta N\,dt}{C}. \end{cases}$$

En prenant chacune des intégrales figurant aux deuxièmes membres des équations (4) comme mesure du couple correspondant, on voit que le théorème II s'applique à la rotation finie produite par un couple de percussions.

Revenons au problème général que nous avons posé au

commencement de ce paragraphe. Nous connaissons maintenant le mouvement qui résulterait de l'action du couple sur le corps en repos; et nous savons qu'il faut, pour obtenir la rotation réelle du solide, composer ce mouvement avec celui que le corps, animé d'une rotation donnée, prendrait s'il était abandonné à lui-même et soustrait à l'action de tout effort extérieur, abstraction faite de la réaction du point fixe.

Or nous n'avons encore aucune notion sur la manière de déterminer ce dernier mouvement, lequel doit être regardé, relativement à un corps mobile autour d'un point fixe, comme l'analogue du mouvement rectiligne et uniforme d'un point matériel libre.

Nous savons seulement que, quand l'axe instantané n'est pas l'un des trois axes principaux du point fixe, la rotation du corps abandonné à lui-même ne reste pas constante ni en grandeur ni en direction. Soient OI l'axe instantané (*fig.* 27),

Fig. 27.



OI' la rotation que le corps prendrait naturellement dans l'instant suivant; Oζ la rotation infiniment petite produite par le couple : on obtiendra l'axe effectif de rotation en composant Oζ avec OI'.

La question qui doit donc nous préoccuper actuellement est celle du mouvement d'un solide fixé par un point et libre de toute action extérieure. Nous allons exposer en détail la solution élégante que Poinsot a donnée de ce problème important; mais auparavant il sera convenable de donner les formules générales du mouvement de rotation d'un solide soumis à des forces quelconques.

Équations générales de la rotation des corps.

Le principe de d'Alembert fournit des équations d'équilibre qui doivent suffire à déterminer le mouvement du solide. Dans le cas qui nous occupe, ces équations se réduisent à trois, qu'on obtient en égalant à zéro la somme des moments des forces extérieures et des forces d'inertie autour de trois axes rectangulaires fixes passant par le point O :

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} Zy - Yz &= \sum m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right),\\ Xz - Zx &= \sum m\left(z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2}\right),\\ Yx - Xy &= \sum m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right).\end{aligned}\right.$$

Ces équations contiennent un nombre infini de variables inconnues, à savoir les coordonnées x, y, z de tous les points du corps mobile. Mais on réduit ces variables au nombre de trois, en exprimant que la figure formée par tous les points mobiles reste invariable pendant le mouvement de l'ensemble.

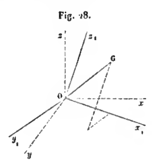
Pour cela, faisant abstraction du solide lui-même, nous suivrons le mouvement de trois axes rectangulaires fixes relativement à ce corps Ox_1, Oy_1, Oz_1, axes par rapport auxquels les coordonnées de tous les points du corps sont des constantes. x, y, z s'expriment en fonction des constantes x_1, y_1, z_1 et de trois quantités variables seulement, à savoir les angles θ, ψ, φ, qui déterminent la position des droites mobiles Ox_1, Oy_1, Oz_1, par rapport aux axes fixes Ox, Oy, Oz. En effectuant le changement de variables par les procédés ordinaires de l'Algèbre, on aurait les équations du mouvement.

Seulement cette marche naturelle conduit à des calculs très-longs, qu'on évite en appliquant le théorème de la page 80, dont la forme géométrique nous dispense de transformations analytiques, plus ou moins équivalentes à celles qui nous ont fourni ce théorème.

Concevons donc qu'on mène par le point O (*fig.* 28) trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, fixes d'une manière absolue,

et trois axes Ox_1, Oy_1, Oz_1, fixes par rapport au corps solide et entraînés dans son mouvement; enfin soit OG l'axe du

Fig. 28.



couple résultant des quantités de mouvement. Pour avoir des formules plus simples, nous supposerons que Ox_1, Oy_1, Oz_1 soient les trois axes principaux qui correspondent à l'origine O.

Proposons-nous d'abord de chercher les projections de OG sur les trois axes mobiles.

Comme la grandeur et la direction de la ligne OG dépendent uniquement des vitesses des différents points du solide, nous pouvons regarder le mouvement comme une rotation effective, et, conformément à nos notations habituelles, nous désignerons par les lettres p, q, r les composantes de cette rotation suivant les axes Ox_1, Oy_1, Oz_1.

Cela posé, le moment par rapport à un axe quelconque de la quantité de mouvement mv d'un point du solide est égal à la somme des moments des composantes de mv relatives aux trois rotations p, q, r; donc le couple résultant OG peut s'obtenir par la composition des couples partiels correspondants. Or, Ox_1 étant un axe principal, l'axe du couple résultant qui provient de la rotation p, coïncide en direction avec Ox_1, et sa grandeur est représentée par le produit

$$Ap,$$

A étant le moment d'inertie du corps autour de l'axe principal Ox_1.

Les rotations q, r donneront de même, autour des deux

autres axes principaux,

$$Bq,\ Cr;$$

et l'on conclut des raisonnements qui précèdent que l'axe OG a pour projections, respectivement sur les trois axes mobiles Ox_1, Oy_1, Oz_1,

$$Ap,\ Bq,\ Cr.$$

Connaissant ainsi les coordonnées du point G par rapport à trois axes dont le mouvement est bien défini par les quantités p, q, r, nous pouvons trouver la vitesse absolue de ce point G; et, en exprimant que cette vitesse est égale et parallèle à l'axe du couple résultant des forces extérieures, nous obtiendrons trois équations qui sont celles du mouvement de rotation.

Soient L, M, N les sommes des moments des forces données relativement à Ox_1, Oy_1, Oz_1; ces quantités sont aussi les projections de l'axe du couple résultant sur les mêmes axes.

Quant à la vitesse du point G, elle se compose :

1° De la vitesse relative aux axes mobiles, vitesse dont les composantes sont les dérivées par rapport au temps des coordonnées relatives Ap, Bq, Cr:

$$A\frac{dp}{dt},\quad B\frac{dq}{dt},\quad C\frac{dr}{dt};$$

2° De la vitesse d'entraînement, provenant de ce que les axes Ox_1, Oy_1, Oz_1 sont animés d'un mouvement de rotation défini par les quantités p, q, r. Or nous avons trouvé en Cinématique que les projections de la vitesse d'un point dont les coordonnées sont X_1, Y_1, Z_1 ont pour valeurs

$$\begin{aligned} v_{x_1} &= qZ_1 - rY_1, \\ v_{y_1} &= rX_1 - pZ_1, \\ v_{z_1} &= pY_1 - qX_1. \end{aligned}$$

En remplaçant, dans ces expressions, X_1, Y_1, Z_1 par les coordonnées Ap, Bq, Cr du point G', on trouve pour les projections de la vitesse d'entraînement

$$\begin{aligned} &(C - B)qr, \\ &(A - C)rp, \\ &(B - A)pq. \end{aligned}$$

On a donc enfin pour les équations cherchées

$$(2)\quad \begin{cases} L = A\dfrac{dp}{dt} + (C - B)qr, \\ M = B\dfrac{dq}{dt} + (A - C)rp, \\ N = C\dfrac{dr}{dt} + (B - A)pq. \end{cases}$$

Ces équations, qui portent le nom d'*équations d'Euler*, sont du premier ordre par rapport aux inconnues p, q, r; elles constituent le premier groupe des équations du mouvement de rotation.

Un deuxième groupe nous sera fourni par les trois équations différentielles suivantes, établies en Cinématique,

$$(3)\quad \begin{cases} p = \sin\varphi \sin\theta \dfrac{d\psi}{dt} + \cos\varphi \dfrac{d\theta}{dt}, \\ q = \cos\varphi \sin\theta \dfrac{d\psi}{dt} - \sin\varphi \dfrac{d\theta}{dt}, \\ r = \dfrac{d\varphi}{dt} + \cos\theta \dfrac{d\psi}{dt}. \end{cases}$$

Le problème général de la rotation des corps se trouve ainsi ramené à des termes purement analytiques, c'est-à-dire à l'intégration de six équations simultanées du premier ordre, entre les variables θ, ψ, φ et les auxiliaires p, q, r, dont nous connaissons la signification géométrique.

Nous allons maintenant discuter un certain nombre de cas particuliers du problème, en commençant par celui où les forces extérieures sont toutes nulles.

Étude géométrique du cas où il n'y a pas de forces extérieures.

Si l'on voulait traiter le problème analytiquement, il faudrait faire dans les équations (2)

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0;$$

on aurait ainsi trois équations qui ne contiennent plus que les

inconnues p, q, r, et qu'il est très-facile d'intégrer isolément,

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{l} A\dfrac{dp}{dt}+(C-B)\,qr=0,\\[2mm] B\dfrac{dq}{dt}+(A-C)\,rp=0,\\[2mm] C\dfrac{dr}{dt}+(B-A)\,pq=0.\end{array}\right.$$

Une fois les valeurs de p, q, r connues, les équations (3) servent à calculer les angles θ, ψ, φ, qui déterminent à chaque instant le lieu du corps par rapport à trois axes fixes. Les formules générales ont été données par Jacobi (*); elles sont assez compliquées.

Mais Poinsot a su donner une grande élégance à la théorie de la rotation d'un corps qui tourne autour d'un point fixe en vertu d'un mouvement acquis, et sans l'intervention d'aucune force; il a tiré toutes les propriétés de ce mouvement des théorèmes généraux de la Dynamique, par une série de déductions qui sont de la Géométrie pure.

Pour avoir l'image la plus nette et la plus précise du mouvement, il faut, considérant les trois axes principaux dont l'origine commune est le point fixe, se représenter sur ces axes l'ellipsoïde central des corps; quant à la figure de ce corps lui-même, elle est tout à fait indifférente, du moment que l'on connaît un système de trois axes principaux et les moments d'inertie qui correspondent à ces trois axes.

Cela posé, l'application du théorème des aires, aucune force extérieure n'agissant sur le corps que nous étudions, nous donne en premier lieu la propriété suivante :

Théorème I. — *L'axe du couple résultant des quantités de mouvement conserve dans l'espace une grandeur et une direction fixes.*

Or Ap, Bq, Cr sont les projections de cet axe sur les axes mobiles; ces quantités ne sont pas constantes, puisque ce sont les projections d'une grandeur fixe sur des directions qui va-

(*) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1re série, t. XIV, p. 337.

rient. Quoi qu'il en soit, la somme des carrés des projections d'une même droite sur trois axes rectangulaires, fixes ou mobiles, exprime toujours le carré de la longueur de cette droite. On a donc, en désignant par G une constante qui représente l'axe du couple résultant, une première intégrale des équations (1), en écrivant

$$(5) \qquad A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = G^2 \text{ (*)},$$

intégrale qu'on aurait pu tirer des trois équations (4) en les multipliant respectivement par Ap, Bq, Cr, faisant la somme et intégrant.

En deuxième lieu, le principe des forces vives nous fournit la propriété que voici :

THÉORÈME II. — *La force vive du solide reste invariable dans le mouvement.*

Si l'on désigne par ω la vitesse angulaire, par H le moment d'inertie, et par F une constante arbitraire, l'intégrale des forces vives est

$$(6) \qquad H\omega^2 = F;$$

(*) Cette équation exprime seulement que la grandeur de l'axe du couple résultant des quantités de mouvement est invariable. Nous pourrions obtenir d'autres intégrales en écrivant que la direction de l'axe est aussi constante. En effet,

$$\cos\overline{G, x_1} = \frac{Ap}{G},$$

$$\cos\overline{G, y_1} = \frac{Bq}{G},$$

$$\cos\overline{G, z_1} = \frac{Cr}{G}.$$

Donc

$$\cos\overline{G, x} = \frac{Aap + Ba'q + Ca''r}{G} = \text{const.},$$

$$\cos\overline{G, y} = \frac{Abp + Bb'q + Cb''r}{G} = \text{const.},$$

$$\cos\overline{G, z} = \frac{Acp + Bc'q + Cc''r}{G} = \text{const.}$$

Seulement, ces intégrales nous seront inutiles pour le moment, parce qu'elles contiennent, outre les composantes p, q, r, les angles θ, φ, ψ, dans les expressions de a, a', a'',....

ou bien, en observant que l'axe instantané fait avec les axes principaux des angles dont les cosinus sont égaux à $\frac{p}{\omega}$, $\frac{q}{\omega}$, $\frac{r}{\omega}$, et que le moment d'inertie relatif à une droite (λ, μ, ν) a pour expression

$$H = A\cos^2\lambda + B\cos^2\mu + C\cos^2\nu,$$

on met l'intégrale (6) sous la forme

$$(7) \qquad Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = F.$$

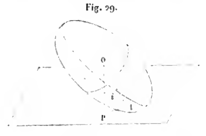
On serait arrivé au même résultat en multipliant les deux membres des équations (4) par p, q, r respectivement, faisant la somme et intégrant.

Une fois en possession des intégrales (5) et (7), on achèverait l'intégration en tirant de ces deux équations les valeurs de p et de q, et substituant ces valeurs dans la troisième équation (4). On obtiendrait ainsi $\frac{dr}{dt}$ en fonction de r, des quantités données A, B, C et des constantes F, G, introduites par les deux premières intégrations, c'est-à-dire que l'on n'aurait plus qu'à effectuer une quadrature pour avoir l'expression de r, par suite les expressions de p et de q en fonction du temps.

D'un autre côté, il est extrêmement simple de trouver géométriquement toutes les propriétés du mouvement, au moyen des deux intégrales fournies par le principe des aires et par le principe des forces vives.

Propriétés géométriques du mouvement. — Menons à l'ellipsoïde central (*fig.* 29) un plan tangent parallèle au plan inva-

Fig. 29.



riable; soit OP la perpendiculaire abaissée du centre O sur ce

plan (c'est-à-dire l'axe du couple résultant des quantités de mouvement du solide), et OI le rayon mené du centre au point de contact : la ligne OI n'est autre chose que l'axe instantané de rotation (page 129), ou, pour parler le langage de M. Poinsot, le point I est le *pôle* de la rotation instantanée, à la surface de l'ellipsoïde central.

Continuons à désigner par i l'angle POI, nous avons trouvé

$$\cos i = \frac{H\omega}{G};$$

or si nous faisons attention que $H\omega^2$ est une constante en vertu du principe des forces vives, et que G est également une constante en vertu du principe des aires, nous concluons de l'équation précédente

$$(8) \qquad \omega \cos i = \text{const.}$$

Théorème III. — *La composante de la rotation instantanée, perpendiculairement au plan invariable, reste constante.*

Ainsi, quand un corps abandonné à lui-même tourne autour d'un axe qui n'est pas un axe principal d'inertie, la grandeur de la rotation varie à chaque instant, ainsi que la direction de l'axe autour duquel elle s'effectue ; mais la projection de cette rotation, perpendiculairement au plan invariable, reste constante.

Faisons

$$\text{OI} = u, \quad \text{OP} = h = u \cos i;$$

le moment d'inertie H est proportionnel à $\frac{1}{u^2}$, en vertu de la définition de l'ellipsoïde. On conclut de cette remarque et de l'équation (6) que le rapport $\frac{\omega}{u}$ est une constante ; et, comme nous venons de voir que la projection $\omega \cos i$ est aussi une constante, il en est de même de la quantité $u \cos i$, c'est-à-dire de la distance h, du centre de l'ellipsoïde au plan qui touche cet ellipsoïde au pôle I.

Théorème IV. — *La vitesse angulaire de la rotation est proportionnelle à la longueur du rayon vecteur mené du centre de l'ellipsoïde au pôle instantané.*

THÉORÈME V. — *Le plan qui touche l'ellipsoïde au pôle de la rotation reste toujours à la même distance du centre de cet ellipsoïde.*

Nous arrivons à la belle propriété qui constitue la proposition capitale de la théorie qui nous occupe. Le centre O de l'ellipsoïde dont nous voulons nous représenter le mouvement est fixe, et nous venons de trouver que le plan tangent en I, plan dont la direction est invariable, reste de plus à une distance constante du point fixe O; donc

THÉORÈME VI. — *Le plan parallèle au plan invariable, qui touche sans cesse l'ellipsoïde central au pôle instantané de rotation, est toujours un seul et même plan, fixe dans l'espace absolu.*

On se représentera donc le mouvement du corps, en concevant : 1° que l'ellipsoïde central, dont le centre est maintenu fixe, reste en contact avec un même plan, fixe dans l'espace absolu; 2° qu'il tourne à chaque instant autour du rayon vecteur qui va du centre au point de contact; 3° enfin qu'il tourne avec une vitesse angulaire, proportionnelle à la longueur même de ce rayon (*fig.* 29). Tel est le théorème de Poinsot (*).

La connaissance que nous venons d'acquérir des circonstances que présente le mouvement d'un solide invariable abandonné à lui-même sans qu'aucune force le sollicite vient compléter la notion que nous avions tout d'abord relativement à l'inertie de la matière. Nous avons admis en principe qu'un point matériel qui n'est soumis à aucune force se meut uniformément en ligne droite. Nous savons maintenant comment

(*) On énonce quelquefois ce théorème en disant que l'ellipsoïde roule sans glisser sur le plan tangent parallèle au plan invariable. D'après les principes établis dans la partie géométrique de cet Ouvrage, il est clair que nous ne pouvons pas dire que l'ellipsoïde roule sans glisser. En effet, il tourne à chaque instant autour d'un axe incliné sur le plan invariable; cette rotation se décompose en deux, l'une autour d'un axe situé dans le plan et qui ne donne aucun glissement, et l'autre autour d'un axe perpendiculaire qui donne un résultat analogue à celui d'un pivot sur sa crapaudine. On peut dire, si l'on veut, que le point de contact n'a aucun mouvement de glissement, ou, avec M. Poinsot, que le corps n'a pas de mouvement de *rosion;* mais les points infiniment voisins glissent de la même manière qu'une jante conique infiniment petite qu'on forcerait à se mouvoir en ligne droite sur un plan fixe.

les choses se passent lorsqu'au lieu d'un point matériel on considère un solide invariable qui se trouve dans le même cas, c'est-à-dire qui n'est soumis à l'action d'aucune force. Le centre de gravité de ce solide se meut uniformément en ligne droite, et en même temps le solide tourne autour de ce centre de gravité, conformément aux lois simples qui viennent d'être indiquées d'après Poinsot.

Développement de la solution.

Dans cette image si claire que nous avons donnée de la rotation des corps, on voit sur-le-champ toutes les circonstances et toutes les variétés que ce mouvement peut offrir, et l'on est conduit, comme par la main, aux opérations et aux calculs qu'il faut faire, si l'on veut en mesurer toutes les différentes affections.

Et d'abord, cette suite de points par lesquels l'ellipsoïde central du corps vient se mettre en contact avec le plan fixe du couple résultant des quantités de mouvement, étant considérée sur la surface de l'ellipsoïde, y marque la route du pôle instantané dans l'intérieur du corps; et les mêmes points, étant considérés sur le plan fixe, y marquent sa route dans l'espace absolu. On peut déterminer sur-le-champ ces deux lignes courbes, et, conformément à ce que nous avons vu en Cinématique, les considérer comme les bases de deux surfaces coniques de même sommet, dont l'une, mobile comme le corps, roulant sur l'autre qui est fixe dans l'espace absolu, donnerait à ce corps le mouvement précis qui l'anime.

De la courbe décrite par le pôle instantané de la surface de l'ellipsoïde central. — Pour trouver cette courbe, qui est à double courbure, et que nous désignerons par (s), il n'y a qu'à chercher la suite des points par lesquels un ellipsoïde aux *rayons principaux* a, b, c serait touché par un plan assujetti à rester toujours à une même distance donnée h du centre de cet ellipsoïde, ou, ce qui est la même chose, la suite des points de contact avec l'ellipsoïde d'un plan qui se mouvrait en touchant à la fois cet ellipsoïde et une sphère concentrique au rayon donné h. Or il est clair que cette courbe (s) est un orbe fermé, à double courbure, espèce de *roue* elliptique dont

l'axe ou l'essieu est, ou le *rayon majeur a* de l'ellipsoïde central, ou le *rayon mineur c*, selon que le rayon h de la sphère est donné plus grand ou plus petit que le *rayon moyen b* de cet ellipsoïde.

C'est, au reste, ce qu'on peut voir par le calcul le plus simple; en effet, l'équation de la surface de l'ellipsoïde étant

$$(9)\qquad \frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{z_1^2}{c^2}=1,$$

la distance du centre au plan tangent est exprimée par

$$1:\sqrt{\frac{x_1^2}{a^4}+\frac{y_1^2}{b^4}+\frac{z_1^2}{c^4}},$$

x_1, y_1, z_1 désignant les coordonnées du point de contact. En égalant cette expression à la distance donnée h, on a la seconde équation du lieu décrit par le pôle

$$(10)\qquad \frac{x_1^2}{a^4}+\frac{y_1^2}{b^4}+\frac{z_1^2}{c^4}=\frac{1}{h^2},$$

d'où, en éliminant tour à tour, au moyen de la première, chacune des trois coordonnées x_1, y_1, z_1, on tire les équations suivantes :

$$(11)\qquad \begin{cases} \dfrac{b^2-a^2}{b^4}y_1^2+\dfrac{c^2-a^2}{c^4}z_1^2=\dfrac{h^2-a^2}{h^2},\\[2ex] \dfrac{c^2-b^2}{c^4}z_1^2+\dfrac{a^2-b^2}{a^4}x_1^2=\dfrac{h^2-b^2}{h^2},\\[2ex] \dfrac{a^2-c^2}{a^4}x_1^2+\dfrac{b^2-c^2}{b^4}y_1^2=\dfrac{h^2-c^2}{h^2}, \end{cases}$$

qui donnent les projections de la courbe sur les trois plans principaux.

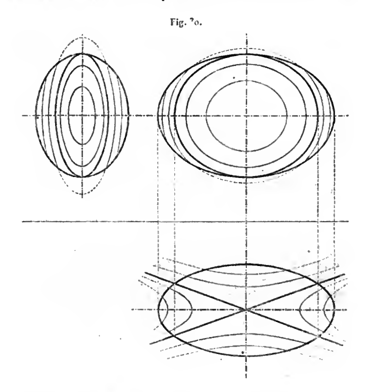
Des variétés que la courbe (s) peut offrir dans certains cas particuliers. — Prenons deux plans de projection (*fig.* 30) : l'un, le plan horizontal, parallèle au plan x_1y_1, l'autre, le plan vertical, parallèle à x_1z_1; enfin, prenons encore un troisième plan auxiliaire parallèle au plan z_1y_1, que nous rabattrons sur le plan horizontal.

Sur le plan vertical, l'ellipsoïde aura pour contour apparent une ellipse dont les axes sont $2a$ et $2c$; en projection hori-



zontale, l'ellipse aura pour axes $2a$ et $2b$; enfin, sur le plan auxiliaire, les axes de l'ellipse seront $2b$ et $2c$.

Fig. 70.



La courbe ne dépend, comme on voit, que de quatre paramètres : les trois demi-axes de l'ellipsoïde central qui sont donnés par la nature du corps, et ensuite la hauteur h du centre au-dessus du plan tangent invariable, laquelle est donnée par la direction de l'axe du couple résultant des quantités de mouvement.

Les variétés que cette courbe peut offrir pour un même corps ne dépendent donc que des valeurs particulières qu'on peut attribuer à la constante h.

Or cette ligne, étant la distance du centre de l'ellipsoïde à l'un de ses plans tangents, est nécessairement intermédiaire

entre le plus grand et le plus petit rayon de l'ellipsoïde. De sorte que, les trois rayons a, b, c étant rangés dans cet ordre de grandeur

$$a > b > c,$$

qui répond pour les moments d'inertie principaux à l'ordre inverse

$$A < B < C,$$

on ne peut avoir à distinguer que deux cas généraux : h compris entre a et b, et h compris entre b et c; ensuite deux cas particuliers : $h = a$, $h = c$, et enfin un cas singulier : $h = b$.

On voit que, sur le plan $x_1 y_1$ et sur le plan $y_1 z_1$, les courbes projetées sont toujours des ellipses semblables, car les coefficients des carrés des variables sont toujours de même signe et sont indépendants de h. Au contraire, sur le plan des $z_1 x_1$, on a des hyperboles ayant toutes les mêmes asymptotes, et dont la position, par rapport à ces asymptotes, dépend du signe de la quantité $h^2 - b^2$, laquelle peut être positive, nulle ou négative.

Supposons d'abord $h = b$. La deuxième équation (11) représente deux droites qui sont les traces, sur le plan $x_1 z_1$, de deux plans perpendiculaires à celui-ci, lesquels coupent l'ellipsoïde suivant deux ellipses ayant pour axe commun l'axe moyen de l'ellipsoïde. Ces ellipses sont inclinées sur le plan $x_1 y_1$, d'un angle Θ donné par la formule

$$\tang \Theta = \pm \frac{c^2}{a^2} \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2}}, \tag{12}$$

en projection horizontale; elles ont pour projection commune une ellipse dont l'un des axes sera b, et l'autre la projection de l'axe de l'ellipse dans l'espace, axe qu'on trouvera facilement à l'aide de l'équation de l'ellipsoïde et de la valeur de tang Θ.

Ceci posé, quand h sera différent de b, on aura, sur le plan $x_1 z_1$, des hyperboles, ou plutôt des arcs d'hyperboles ayant pour asymptotes les projections des ellipses singulières, et suivant que h sera plus grand ou plus petit que b, ces hyperboles seront situées dans un des angles des asymptotes ou dans l'autre. Sur les plans $x_1 y_1$ et $z_1 y_1$, les projections des

courbes sont des ellipses semblables aux ellipses singulières. Toutes celles qui se projettent à l'intérieur de celles-ci sont entières, les autres n'ont que deux arcs à l'intérieur, le reste sort de l'ellipse principale et constitue les parties parasites des courbes.

Dans les deux cas particuliers de $h = a$ et $h = c$, la courbe se réduit à un point qui est le sommet A ou le sommet C de l'ellipsoïde central; quand le pôle occupe l'une ou l'autre de ces deux positions, le corps tourne uniformément autour de l'un ou de l'autre des deux axes principaux $2a$ ou $2c$, lequel axe demeure immobile dans l'espace absolu.

On pourrait remarquer que la courbe (s) est en quelque sorte *double;* car, tandis que le pôle instantané I décrit cette courbe (s), il est évident que le pôle opposé I' en décrit une autre (s'), parfaitement égale à l'autre partie de l'ellipsoïde; mais il suffit d'en considérer une seule.

On voit que cette courbe à double courbure a, comme une ellipse, quatre sommets principaux où elle est divisée en quatre parties égales et symétriques, et il est évident que ces sommets sont les quatre points où la courbe traverse les deux plans principaux conduits par l'axe qui lui sert comme d'essieu : c'est en ces points que le rayon vecteur OI atteint des valeurs *maxima* ou *minima*, comme il est facile de le voir en cherchant le maximum de l'expression

$$u = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2},$$

où les variables x_1, y_1, z_1 sont liées par les équations (9) et (10).

De la courbe décrite par le pôle instantané dans l'espace absolu. — La courbe (s) que le pôle instantané I de la rotation trace à la surface de l'ellipsoïde central étant ainsi déterminée, il est facile de trouver la courbe (σ) que le pôle instantané décrit sur le plan fixe; car, en considérant l'orbe fermé (s) comme la base d'une surface conique dont le sommet est au centre O de l'ellipsoïde, il est clair que, pendant le mouvement du corps, ce cône tourne sans cesse autour de sa génératrice OI, en appuyant le contour de sa base sur le plan fixe, et qu'ainsi ce contour (s) y trace en roulant la courbe plane (σ), que le pôle instantané décrit dans l'espace absolu. Les arcs

infiniment petits $d\sigma$ de cette courbe plane sont donc égaux aux arcs successifs ds de cette roue mobile (s) qui les produit; de sorte que, si l'on a l'équation de celle-ci, entre la longueur s de son arc et son rayon vecteur u, il suffit d'y changer s en σ pour avoir l'équation de la courbe (σ) entre son arc et le même rayon u émané du centre O de l'ellipsoïde.

Mais comme cette courbe (σ) est plane, si l'on aime mieux la rapporter à des rayons vecteurs v émanés d'un point pris dans le plan même de la courbe, on peut choisir pour ce nouveau centre le pied P de la perpendiculaire abaissée du centre O de l'ellipsoïde sur le plan fixe que l'on considère (*fig.* 29); et alors il suffit de changer u en $\sqrt{h^2+v^2}$ dans l'équation dont il s'agit.

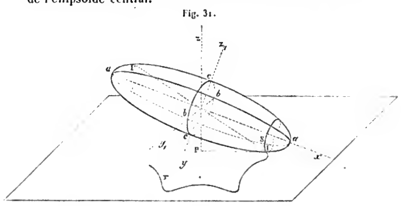
Le rayon vecteur v de la courbe plane (σ) n'étant autre chose que la projection du rayon u de la roue (s) dont les éléments ds viennent s'appliquer l'un après l'autre sur le plan pour former les éléments égaux $d\sigma$ de la courbe plane (σ), il est clair que le rayon v va, comme le rayon u, d'un *maximum* à un *minimum*, de ce *minimum* à un *maximum* suivant, égal au premier, et ainsi de suite à l'infini : et cela par des intervalles (ou longueurs d'arcs σ) égaux entre eux, et au quart de la génératrice (s). Donc

La courbe (σ) décrite par le pôle instantané dans l'espace absolu est une courbe plane régulièrement ondulée autour d'un même centre, c'est-à-dire une courbe formée par une suite d'ondes égales et régulières, dont les sommets sont équidistants, et qui serpente à l'infini entre deux cercles concentriques dont elle va toucher alternativement l'une et l'autre circonférence (fig. 31).

Si l'angle au centre, qui répond à deux sommets consécutifs supérieurs ou inférieurs de la courbe ondulée (σ), est commensurable avec quatre angles droits, et qu'on désigne par n le plus petit nombre entier de cercles que cet angle ou ce secteur mesure, la courbe (σ) se fermera, et le pôle qui la décrit reprendra exactement sa première route, après avoir fait n fois le tour entier de l'espace angulaire. Mais, comme l'intervalle de deux sommets consécutifs du même nom ne répond qu'à une moitié de l'orbe mobile (s), il est clair qu'il

faut doubler ce nombre de révolutions, si l'on veut que le pôle instantané se retrouve, non-seulement au même lieu dans l'espace absolu, mais encore au même lieu sur la surface de l'ellipsoïde central.

Fig. 31.



Si l'angle dont il s'agit n'est pas commensurable avec quatre angles droits, la courbe ondulée (σ) ira à l'infini, sans pouvoir jamais se fermer; et le pôle instantané, qui reviendra toujours périodiquement au même lieu dans le corps, ne pourra jamais retomber en même temps au même lieu dans l'espace.

Telles sont, en général, les deux courbes décrites par le pôle instantané, l'une dans l'intérieur du corps, et l'autre dans l'espace absolu. Et quoique ces courbes soient de formes si différentes, comme c'est un seul et même point qui décrit à la fois l'une et l'autre, leurs équations, prises entre le rayon vecteur émané du centre O et la longueur de l'arc décrit, sont exactement une seule et même équation.

Le *cône roulant*, à la surface duquel la première courbe (s) sert de base, est simplement un *cône droit du second degré;* mais le *cône fixe* sur lequel il roule est un *cône transcendant* dont la surface ondule à l'infini autour de l'axe fixe du couple; c'est aussi une espèce de cône droit et circulaire, mais dont la surface serait, pour ainsi dire, *cannelée* suivant le contour régulièrement ondulé de la courbe (σ) qui lui sert de base.

Cas singulier : $h = b$. — Dans le cas *singulier* de h égal au rayon *moyen* b de l'ellipsoïde central, la courbe (s) ne se réduit pas à un point; car sur la surface de l'ellipsoïde, outre le pôle moyen B, où le plan tangent est à une distance $h = b$ du centre O, il y a une infinité d'autres points où le plan tangent se trouve à cette même distance b du centre de cet ellipsoïde, et la suite de ces points forme deux ellipses égales, dont les plans se croisent suivant l'axe moyen $2b$, et sont inclinés au plan principal ab d'un angle dont la tangente est

$$\pm \frac{c^2}{a^2}\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2}}\ :$$

de sorte que ces deux ellipses, qui ont pour leur commun petit axe la ligne $2b$, ont pour leur grand axe (*) une ligne

$$(13) \qquad 2\beta = 2\sqrt{a^2 + c^2 - \frac{a^2 c^2}{b^2}}\ ;$$

c'est ce qui se voit sur-le-champ par les équations de l'orbe (s), en y supposant $h = b$.

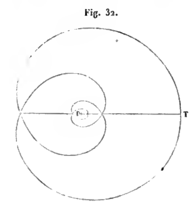
Dans ce cas singulier de $h = b$, la courbe (σ) est donc produite par le mouvement de l'une (s) de ces deux ellipses dont on retiendrait le centre immobile en O, à une hauteur b au-dessus du plan fixe, et dont on ferait rouler la circonférence sur ce plan, avec lequel on l'aurait mise en contact. Or il est aisé de voir que, dans ce cas, la courbe (σ) décrite par le point de contact est une ligne *spirale* qui va en tournant autour du centre P et s'en rapproche sans cesse de plus près que tout ce qu'on voudra, comme d'un point asymptotique, sans pouvoir jamais l'atteindre (*fig.* 32). Cette spirale, considérée dans toute son étendue, est une courbe symétrique à gauche et à droite d'un certain point qui la divise en deux parties égales. Car, en revenant sur ses pas, en faisant rouler l'ellipse en sens contraire, le rayon vecteur v revient en augmentant jusqu'à une certaine valeur

$$v = \sqrt{\beta^2 - b^2},$$

(*) Il est facile de s'assurer que l'axe égal à 2β est toujours le plus grand, de sorte que nos asymptotes sont toujours au-dessous du plan des sections circulaires.

qui est son maximum; après quoi, il diminue par les mêmes degrés, de sorte que son extrémité I décrit de l'autre côté

Fig. 32.



une spirale égale à la première et qui fait comme la moitié de la courbe entière et continue (σ) dont il s'agit. Cette courbe a donc un sommet, à gauche et à droite duquel elle jette deux branches égales qui vont, en sens contraires, tourner en spirales autour d'un seul et même centre P; et quoique chacune de ces branches fasse un nombre infini de révolutions autour de ce centre sans jamais l'atteindre, la longueur totale de la courbe est *finie* et égale à la demi-circonférence de l'ellipse roulante qui la produit.

Le pôle I, qui décrit cette spirale de longueur finie, ne peut jamais la parcourir dans toute son étendue : quelque près qu'on le suppose déjà du centre P dont il s'approche, il lui faut encore un temps infini pour achever le petit arc qui reste à décrire, ou, pour parler exactement, il ne pourra jamais l'achever.

Dans ce cas singulier du mouvement des corps, le pôle instantané de la rotation est donc un point toujours nouveau, et dans le corps, et dans l'espace absolu; je veux dire que, dans le cours infini de la rotation, le pôle ne peut jamais revenir au même lieu, ni dans le corps, ni dans l'espace, quoiqu'il ne décrive qu'une ligne finie, et dont la longueur serait tout au plus égale à la demi-circonférence de l'ellipse, en sup-

posant le temps infini, non-seulement après, mais encore avant l'époque que l'on considère.

Tel est le mouvement du pôle quand on suppose $h = b$, c'est-à-dire quand le plan du couple résultant des quantités de mouvement touche l'ellipsoïde central en un point qui appartient à l'une ou à l'autre de ces deux ellipses singulières dont nous venons de parler.

Mais s'il arrivait que le plan touchât précisément au pôle moyen B où se croisent ces deux ellipses, le pôle I, qui se confondrait alors avec B et le centre fixe P, resterait parfaitement immobile, et le corps ne cesserait de tourner uniformément autour de l'axe *moyen* OB, comme il ferait autour de l'axe majeur OA, ou de l'axe mineur OC, si le plan du couple était tangent au pôle A, ou du pôle C de l'ellipsoïde. En effet, il n'y aurait aucune raison pour que le pôle I, qui ne peut décrire à la surface que l'une des deux ellipses dont on vient de parler, et qui tombe en ce moment à l'extrémité B de leur axe commun, décrivît l'une plutôt que l'autre de ces deux ellipses parfaitement égales et symétriques; d'où l'on voit qu'à la rigueur l'axe moyen de l'ellipsoïde central est, comme les deux centres, un axe permanent de rotation.

Mais il y a cette différence, c'est que, autour de cet axe moyen, la rotation n'a point de *stabilité :* je veux dire que, pour peu que le pôle I, en vertu d'un petit couple étranger appliqué au corps, vienne à s'écarter du pôle moyen B, il tendra à s'en écarter davantage, s'en allant alors décrire, à la surface, un orbe elliptique (s), soit autour du grand axe, soit autour du petit axe, selon que ce déplacement accidentel du pôle aura fait augmenter ou diminuer la distance h du plan tangent: et si le déplacement est tel que h n'ait pas varié de grandeur, le pôle ira décrire l'une ou l'autre de ces deux ellipses singulières que nous avons considérées.

Il n'y a qu'un seul cas où le pôle I, étant écarté du pôle moyen B de l'ellipsoïde, tendrait à y revenir : c'est le cas où le pôle I serait porté sur la circonférence de l'une des deux ellipses du côté où le *sens* de la rotation tend à le ramener vers B.

S'il est porté sur la même ellipse, mais de l'autre côté de son sommet B, il s'éloignera indéfiniment de ce pôle moyen B,



et il ira tomber, après un temps infini, sur le pôle opposé B′ de l'ellipsoïde. Ainsi, dans ce cas, qui est unique, comme le précédent, l'ellipsoïde qui, au commencement, touchait le plan fixe par son pôle moyen B, le toucherait à la fin par le pôle moyen opposé B′; de sorte que la position du corps se trouverait entièrement renversée dans l'espace. C'est le plus grand dérangement que l'impulsion d'un petit couple étranger puisse amener dans la position d'un corps qui tourne actuellement sur son axe moyen; car, si le pôle est déplacé de toute autre manière sur la surface de l'ellipsoïde, il va décrire, comme on l'a vu, un orbe fermé (*s*), soit autour du grand axe, soit autour du petit axe; et, par conséquent, s'il s'écarte d'abord du pôle moyen B, il s'en rapproche ensuite, et revient périodiquement passer à la même distance de B sur la surface, et à la même distance du centre fixe P, dans l'espace absolu.

Il y a encore une autre variété de la courbe (σ) que le pôle instantané peut décrire dans l'espace; mais elle n'est plus relative à la valeur particulière qu'on suppose à la ligne donnée h : elle dépend uniquement de l'espèce de ce corps, c'est-à-dire de la proportion des axes a, b, c de l'ellipsoïde central.

Si le corps est un de ceux qui ont deux de leurs trois moments principaux d'inertie égaux, il est alors de révolution, ou ce qu'on appelle un *sphéroïde :* sphéroïde *allongé*, si l'axe de révolution est plus grand que le diamètre de l'équateur, ou *aplati* vers les pôles si cet axe est plus petit. Dans l'un et l'autre cas, il est évident que la route (*s*) du pôle à la surface du sphéroïde est un cercle autour de l'axe de ce sphéroïde, et par conséquent la route (σ) du pôle sur le plan fixe est aussi un cercle autour de l'axe du couple résultant des quantités de mouvement. C'est un des cas les plus simples de la rotation des corps, parce que tout y est circulaire et uniforme. Cependant, il faut encore remarquer que, si la circonférence du cercle roulant (*s*) n'est pas commensurable avec celle du cercle fixe (σ), le pôle instantané ne peut jamais revenir au même lieu dans le corps et dans l'espace tout à la fois.

Enfin, et c'est ici le cas le plus simple de tous, si les trois moments d'inertie sont égaux, l'ellipsoïde central devient une sphère, l'axe instantané de rotation se confond avec la per-

pendiculaire au plan invariable, les deux courbes (s) et (σ) se réduisent à deux points qui n'en font qu'un seul, et le pôle instantané I reste immobile et dans le corps et dans l'espace absolu.

De ce qui fait la mesure de la stabilité pour chacun des deux axes extrêmes de l'ellipsoïde central. — Nous avons déjà remarqué ce qui distingue l'axe *moyen* des deux axes *extrêmes*, sous le point de vue de la stabilité que ces deux axes peuvent offrir dans la rotation des corps; mais pour nous faire une idée nette de cette stabilité, et de ce qui en fait en quelque sorte la *mesure*, imaginons la surface de l'ellipsoïde central comme coupée en quatre parties ou fuseaux par les deux ellipses singulières que nous avons considérées, et dont les deux plans, conduits par l'axe moyen $2b$, sont également inclinés à l'axe majeur $2a$ (l'un au-dessus, l'autre au-dessous) d'un angle O dont la tangente est $\frac{c^2}{a^2}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}}$. Le pôle *moyen* B de l'ellipsoïde est à l'intersection de ces deux ellipses; le pôle majeur A est au centre du fuseau dont l'ouverture est 2O, et le pôle mineur C au centre du fuseau supplémentaire.

Or, en premier lieu, si le pôle instantané I de la rotation tombe sur le pôle moyen B de l'ellipsoïde, il est clair que, pour peu qu'on le déplace, il va tomber dans l'un ou l'autre des deux fuseaux dont il s'agit, et décrire son orbe s autour de l'un ou l'autre pôle principal de l'ellipsoïde. Ou bien, si on le déplaçait sur le contour même de l'une des deux ellipses, il irait décrire la moitié de cette ellipse pour retomber sur le pôle moyen opposé; ou, s'il était porté sur l'autre moitié de la même ellipse, il reviendrait aussitôt au pôle moyen même d'où on l'aurait écarté : d'où il résulte, comme on l'a dit ci-dessus, que, hors de ce cas unique de déplacement, l'axe moyen du corps n'a aucune stabilité.

Mais si le pôle instantané tombe actuellement au pôle majeur A de l'ellipsoïde, il peut être déplacé comme on voudra, dans toute l'étendue du fuseau environnant, sans cesser de décrire son orbe (s) autour du même pôle majeur. Et, si c'est en cela qu'on fait consister la stabilité de la rotation autour de l'axe majeur, on peut dire que la grandeur de ce fuseau en est en quelque sorte la mesure. Et l'on voit de même que

l'étendue du fuseau supplémentaire est la mesure de la stabilité de la rotation autour de l'axe *mineur*.

Actuellement, si l'on suppose que l'un de ces deux axes, tel que a, diffère peu de l'axe moyen, le fuseau qui lui répond est très-petit, et le fuseau supplémentaire est très-grand. L'axe peu différent de l'axe moyen a donc très-peu de stabilité, et l'autre axe en a beaucoup.

Il n'est donc point exact de dire, comme on le fait d'ordinaire, que, si l'axe instantané est un peu écarté de l'axe principal qui répond, soit au plus petit, soit au plus grand moment d'inertie du corps, il s'en éloignera très-peu et ne fera que de petites oscillations pendant toute la durée du mouvement; car, si le moment d'inertie relatif à cet axe diffère peu du moment moyen, le pôle instantané, par un faible dérangement, pourra sortir du petit fuseau où il est actuellement, pour tomber dans le fuseau voisin et y aller décrire son orbe (s) autour de l'autre axe; ou même, s'il n'est déplacé que dans l'intérieur du petit fuseau qui lui répond, il peut encore y décrire un orbe (s) étroit et fort allongé et, par conséquent, faire de très-grandes oscillations de part et d'autre du pôle principal d'où on l'a écarté.

Dans les corps où l'un des moments extrêmes d'inertie diffère peu du moment moyen, et, par conséquent, où l'ellipsoïde du corps central est presque de révolution autour de l'un de ses axes, la stabilité de la rotation n'est donc vraiment assurée que pour cet axe. C'est le cas de la Terre, dont la rotation est très-stable autour de son axe actuel, et le serait très-peu autour du troisième axe, qui, comme on le sait, diffère très-peu de l'axe moyen.

Si cette différence est tout à fait nulle, en sorte que l'ellipsoïde central du corps soit exactement de révolution (projectiles oblongs), il n'y aura de stable que l'axe de ce *sphéroïde;* car il est clair qu'aucun des autres axes principaux (qui sont ici tous les diamètres de l'équateur) ne peut avoir de stabilité. Et en effet, si le pôle instantané tombe actuellement sur l'équateur, et que, pour une cause quelconque, il en soit un peu écarté à gauche ou à droite, il ne restera plus immobile, mais il ira décrire sur la surface de l'ellipsoïde un cercle (s) parallèle et presque égal à l'équateur : d'où l'on voit que le pôle

instantané aura dans le corps un mouvement très-considérable. Mais, d'un autre côté, il est bon de remarquer qu'il n'en aura qu'un très-petit dans l'espace absolu; car le cercle fixe σ, qu'il décrira dans l'espace, aura pour rayon la très-petite distance IP de ce pôle I au pied P de la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent en I. Ainsi l'axe instantané OI qui, dans le corps, décrira la surface d'un cône très-ouvert et presque plan, ne décrira dans l'espace qu'un cône de base très-petite, et paraîtra ainsi comme immobile dans l'espace absolu.

Il n'y a qu'un seul cas d'exception à cette instabilité d'un axe principal situé dans le plan de l'équateur; c'est celui où le pôle instantané serait porté du point de l'équateur où il est actuellement en un autre point du même équateur; car alors il y resterait immobile, comme il aurait fait dans sa première position, si on ne l'en avait point écarté.

Enfin, si les trois axes principaux du corps sont égaux entre eux, et que l'ellipsoïde central devienne ainsi une sphère parfaite, tous les axes sont également stables, ou, en quelque sorte, indifférents à tout déplacement accidentel qui pourrait survenir. Car, si l'axe instantané est porté du lieu où il est dans un autre, il y reste, et redevient immobile et dans le corps et dans l'espace absolu.

§ XVII. — Mouvement d'un solide de révolution fixé par un point de son axe de figure.

Après avoir donné la théorie complète de la rotation d'un corps qui n'est soumis à aucune force extérieure, examinons comment cette rotation naturelle se modifie sous l'action d'un couple.

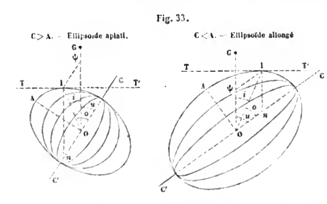
Le seul cas qui se rencontre dans les applications est celui où deux des moments d'inertie principaux relatifs au point fixe sont égaux. C'est le seul cas que nous étudierons en détail, et, dans tout ce qui va suivre, nous supposerons qu'on ait

$$B = A.$$

Notations et définitions. — Pour simplifier le langage, nous regarderons le corps dont nous étudierons le mouvement

comme un solide de révolution autour d'un certain axe OC (*fig.* 33). Nous donnerons le nom d'*axe de figure* à cet axe,

Fig. 33.



lequel est évidemment un axe principal, et nous désignerons par C le moment d'inertie correspondant.

Tous les moments d'inertie relatifs à des axes menés par le point O, perpendiculairement à l'axe de figure, ont une valeur commune A : ces axes forment un plan que je nommerai l'*équateur* du corps.

Comme, dans la théorie de la rotation des solides, il n'y a pas à se préoccuper du corps lui-même, mais uniquement de ses moments d'inertie relatifs aux diverses droites menées par le point fixe, ou, si l'on veut, de l'ellipsoïde central du corps, il ne peut y avoir aucun inconvénient à étendre les dénominations précédentes aux cas où le corps, au lieu d'avoir la figure d'un solide de révolution, a une forme quelconque, pourvu que l'on ait deux des moments d'inertie principaux relatifs au point O égaux entre eux, et, par suite, à tous ceux qui répondent aux divers axes compris dans le plan de l'équateur.

Quelles que soient les forces qui agissent sur un pareil corps, nous savons que le mouvement infiniment petit est une rotation autour d'un certain axe OI, et que l'axe OG du couple résultant des quantités de mouvement est perpendiculaire au plan tangent en I à l'ellipsoïde central.

L'ellipsoïde étant de révolution, les lignes OI et OG sont dans un même plan avec l'axe de figure OC. Ces trois droites

affectent d'ailleurs des dispositions différentes, selon que l'ellipsoïde est aplati ou allongé (*fig.* 33).

Établissons d'abord les relations géométriques qui existent entre les éléments de ces figures, et qui sont indépendantes de l'existence ou de la non-existence des forces agissant sur le corps.

Formules générales relatives à la rotation instantanée.

Désignons par u l'angle de l'axe de figure avec OG, par i l'angle de l'axe instantané avec la même droite; l'angle o compris entre l'axe instantané et l'axe de figure est donné par les relations

$$o = u - i \quad \text{(ellipsoïde allongé)},$$
$$o = u + i \quad \text{(ellipsoïde aplati)}.$$

Nous écrirons pour les deux cas

$$(1) \qquad o = u - i,$$

en convenant de regarder l'angle i comme négatif, quand l'axe OI est à gauche de OG.

Cela posé, il est évident que le couple G, la rotation instantanée ω, le moment d'inertie H, et les trois angles u, i, o sont six quantités dont deux seulement sont indépendantes. En effet, si l'on connaît ω et o, ou bien G et u, le mouvement du corps est déterminé, et tout le reste s'ensuit. Il existe donc entre les éléments que nous avons définis trois relations distinctes, indépendamment de l'équation (1).

Or, nous avons en premier lieu

$$(2) \qquad H = A \sin^2 o + C \cos^2 o.$$

En second lieu, nous avons, pour la grandeur du couple G, l'équation

$$(3) \qquad G \cos i = H\omega,$$

dont nous avons déjà fait fréquemment usage. L'angle i étant toujours aigu, on conclut de cette équation que G est toujours de même signe que ω.

Enfin on aura les formules où figure l'angle u en projetant successivement le couple G sur les deux axes principaux OC et OA, et écrivant que les projections sont représentées par les produits des composantes de ω par les moments d'inertie correspondants,

$$(4)\qquad \begin{cases} G\cos u = C\omega\cos o, \\ G\sin u = A\omega\sin o. \end{cases}$$

D'après ce que nous avons dit il n'y a qu'un instant, l'une des cinq équations que nous venons d'écrire rentre nécessairement dans les quatre autres. On déduit aussi des équations (4)

$$(5)\qquad C\tan u = A\tan o,$$

$$(6)\qquad G = \omega\sqrt{A^2\sin^2 o + C^2\cos^2 o}.$$

$$(7)\qquad \omega = G\sqrt{\frac{\sin^2 u}{A^2} + \frac{\cos^2 u}{C^2}}.$$

Ces formules sont applicables à tous les problèmes qu'on peut se proposer sur la rotation des solides de révolution autour d'un point fixe pris sur leur axe de figure.

Cas où il n'y a pas de forces extérieures.

Si le corps, animé à un instant donné de la rotation ω, est abandonné à lui-même, à partir de cet instant, et soustrait à toute influence extérieure, le mouvement de ce corps obéit aux lois que nous avons trouvées dans le paragraphe précédent. La direction de l'axe OG et la distance du plan tangent TT' au point fixe O demeurent invariables : le lieu des points de contact de l'ellipsoïde avec son plan tangent est le parallèle du point I; sur le plan fixe, ce lieu est une circonférence, décrite du pied de la ligne OG comme centre.

L'axe OI décrit dans l'espace un cône de révolution autour de l'axe OG (*fig.* 34 et 35); ce même axe, dans l'intérieur du corps, décrit un autre cône de révolution autour de l'axe de figure OC. D'après ce que nous avons vu en Cinématique, le mouve-

ment du corps est exactement le même que si ce deuxième cône IOC roulait sans glisser sur le cône fixe IOG.

Définition de la rotation propre et de la précession. — On définit communément un pareil mouvement en disant que le corps tourne autour de son axe de figure en même temps que cet axe est animé d'un mouvement de *précession* uniforme

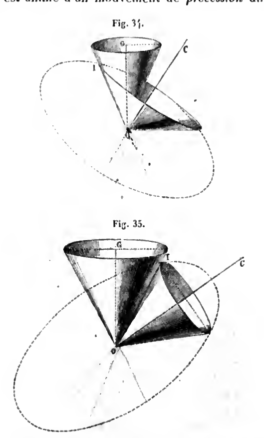


Fig. 34.

Fig. 35.

autour de la droite fixe OG. C'est ainsi qu'on se représente habituellement le mouvement de la Terre. Toutefois, dans ce dernier cas, il faut en outre tenir compte d'un troisième mouvement, dit de *nutation*, en vertu duquel l'axe de figure OC se

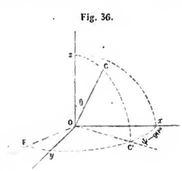


rapproche et s'éloigne périodiquement de la droite invariable autour de laquelle s'effectue le mouvement de précession.

Nous adopterons, dans notre étude actuelle, ces dénominations empruntées au langage de l'Astronomie; et nous définirons le mouvement d'un solide de révolution par la *rotation propre*, la *précession* et la *nutation*, ces quantités étant entendues de la manière suivante.

La position de l'axe de figure OC est donnée par l'angle compris entre cet axe et une droite fixe quelconque Oz, et par l'angle que le plan zOC fait avec un plan fixe arbitraire zOx (*fig.* 36). Nous désignerons par θ l'angle zOC;

Fig. 36.



quant à notre deuxième coordonnée angulaire, qui a pour mesure l'angle rectiligne xOC', compris entre l'axe des x et la projection de OC sur le plan perpendiculaire à Oz, on n'a pas oublié que nous avons l'habitude de la représenter par $\psi - 90°$; l'angle ψ étant l'angle que fait avec l'axe des x la trace sur le plan xOy du plan de l'équateur du corps. Cette trace OE est perpendiculaire à la projection de l'axe de figure; nous l'appellerons la *ligne des nœuds*.

Cela posé, nous avons immédiatement la valeur de la précession :

$$\Psi = \frac{d\psi}{dt},$$

et celle de la nutation :

$$\Theta = \frac{d\theta}{dt};$$

Cas singulier d'un mouvement de précession uniforme.

Un cas intéressant à considérer, c'est celui où, sous l'action d'un couple, les lois du mouvement du corps ont la même forme que celles de la rotation naturelle de ce même corps abandonné à lui-même et soustrait à toute action extérieure. Je veux dire par là que l'axe de figure du corps sera animé d'un mouvement de précession uniforme autour d'une droite fixe avec laquelle il fera un angle constant θ, tandis que le corps tournera lui-même uniformément sur son axe de figure. Le mouvement se distinguera d'ailleurs de celui que nous avons étudié (p. 169) en ce que la droite fixe ne coïncidera plus avec l'axe du couple résultant des quantités de mouvement, et en ce que les relations entre la rotation et la précession seront modifiées.

Cherchons quelles doivent être la grandeur et la direction du couple accélérateur, pour qu'en prenant la droite fixe pour axe des z on ait

$$\Theta = 0, \quad \frac{d\Psi}{dt} = 0, \quad \frac{dn}{dt} = 0.$$

Voyons ce que les équations (12) deviennent dans ces hypothèses. La première donne $N = 0$, et la dernière $N_2 = 0$; donc le couple accélérateur doit avoir son axe dans la ligne des nœuds. Quant à la grandeur de ce couple, elle est fournie par l'équation restante, qui donne

$$(13) \qquad N_1 = (C - A)\Psi^2 \sin\theta\cos\theta + Cn\Psi\sin\theta \text{ (*)}.$$

La rotation instantanée ω est la résultante de Ψ et de n : on détermine cette quantité, ainsi que l'angle r formé par l'axe OI avec Oz, au moyen des deux équations

$$(14) \qquad \begin{cases} \omega \sin r = n\sin\theta, \\ \omega\cos r = \Psi + n\cos\theta. \end{cases}$$

(*) On voit qu'on peut toujours se donner arbitrairement tous les éléments du mouvement, Ψ, n, et l'angle θ, et qu'on trouve une valeur correspondante pour le moment du couple. Cette propriété n'existe pas dans la rotation naturelle, où il existe une relation

$$(10) \qquad Cn = (A - C)\Psi\cos\theta.$$

Enfin on trouve la longueur G et l'angle g par les équations (4), qui s'écrivent, dans notre système actuel de notation,

$$G\cos(\theta - g) = C\omega\cos(\theta - r) = C(n + \Psi\cos\theta),$$
$$G\sin(\theta - g) = A\omega\sin(\theta - r) = A\Psi\sin\theta;$$

on tire en effet de ces équations

$$(15)\quad \begin{cases} G\sin g = (C - A)\Psi\sin\theta\cos\theta + Cn\sin\theta, \\ G\cos g = (A\sin^2\theta + C\cos^2\theta)\Psi + Cn\cos\theta. \end{cases}$$

Il était très-facile de trouver directement l'équation de condition sous une forme qui diffère légèrement de la forme (13), mais qui se ramène aisément à cette forme. En effet, la vitesse du point G, dans les conditions que nous supposons, est perpendiculaire au plan zOG; donc l'axe du couple, égal et parallèle à cette vitesse, coïncide avec la ligne des nœuds OE. De plus, la vitesse angulaire du plan zOC ou zOG étant représentée par Ψ, la vitesse du point G est le produit de Ψ par la distance $G\sin g$ du point considéré à l'axe Oz; donc

$$(13\ bis)\qquad N_1 = G\Psi\sin g.$$

La première équation (15) montre l'équivalence des équations (13) et (13 *bis*).

Enfin nous pouvons encore mettre notre équation de condition sous la forme donnée par Poinsot en remplaçant Ψ par sa valeur $\dfrac{\omega\sin(\theta - r)}{\sin\theta}$; il vient

$$(13\ ter)\qquad N_1 = \frac{G\omega\sin g\sin(\theta - r)}{\sin\theta}.$$

Discussion de la solution. — Nous supposerons que l'angle θ soit aigu; la rotation n sera positive ou négative, et portée, en conséquence, sur la demi-droite qui fait l'angle θ ou sur son prolongement. Il en est de même de la précession Ψ. Enfin les angles comptés à partir de Oz auront le signe +, quand ils seront comptés dans le même sens que l'angle θ, le signe — dans le cas contraire.

L'angle θ étant donné, ainsi que Ψ et n, la construction du parallélogramme de la rotation fournira l'axe OI et déterminera

les deux cônes. Cela fait, on trouvera la ligne OG au moyen de l'ellipse méridienne, et l'on conclura aisément, de la position de cette ligne et du signe de la précession, le sens de la vitesse du point G, par suite celui de l'axe du couple.

Fig. 40.

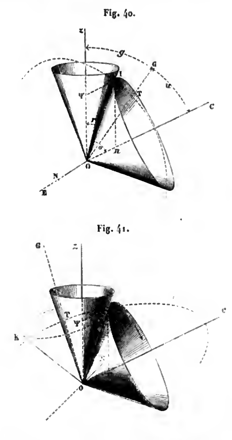


Fig. 41.

Premier cas : $\Psi > 0$, $n > 0$. — L'axe instantané tombe dans l'intérieur de l'angle θ, les deux cônes sont extérieurs (*fig.* 40). Comme OG tombe toujours entre OI et OC dans le cas de l'ellipsoïde aplati, le couple N_1 est positif si $C > A$. Au contraire, quand C est plus petit que A, OG peut être rejeté à gauche de

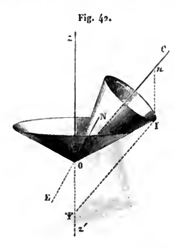
Oz, OI restant à droite; alors N_1 est négatif. Il n'est donc pas exact de dire que le couple N_1 tend constamment à détacher le cône mobile du cône fixe. En effet, quand OG est à gauche de Oz, le corps abandonné à lui-même roulerait sur le cône IOG, qui enveloppe le cône IOz; donc, pour obliger le cône mobile à rouler sur ce dernier cône, il faut un couple tendant à l'appuyer contre cette surface.

Quand OG coïncide avec Oz, le couple N_1 est nul, le mouvement n'étant autre chose que celui que le corps tend à prendre en vertu de son inertie.

Le couple N_1 est encore nul quand OI, et par suite OG, coïncident avec OC; on a alors $\Psi = 0$. La rotation a lieu autour d'un axe principal : elle continue sans l'intervention d'aucun couple.

Deuxième cas : $\Psi < 0$, $n > 0$. — L'axe instantané passe de l'autre côté de OC. Tant que l'angle r est compris entre θ et

Fig. 42.



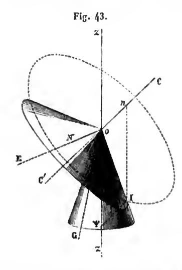
90 degrés, le cône mobile roule dans l'intérieur du cône fixe, OG est à droite de Oz, et, comme la précession est négative, le couple N_1 est négatif : il tend à détacher le cône mobile du cône fixe.

Quand r devient égal à 90 degrés, le cône fixe s'aplatit et se transforme en un plan. Au delà ce même cône fixe se re-

tourne, les cônes se retrouvent extérieurs, le couple reste négatif; la figure devient en tout semblable à la *fig.* 40 retournée, si ce n'est que l'angle des deux axes est obtus, au lieu d'être aigu. Il résulte de cette dernière circonstance que OG ne peut jamais dépasser Oz', et que le couple ne peut changer de signe tant que les cônes restent extérieurs, c'est-à-dire tant que r est compris entre 90 degrés et $90° + \theta$.

Pour $r = 90° + \theta$, c'est le cône mobile qui se transforme en un plan, et qui se retourne ensuite pour envelopper le cône fixe (*fig.* 43). Le couple reste négatif, quelque rapproché que

Fig. 43.



soit OI de l'axe Oz', si l'ellipsoïde central est allongé; mais dans le cas contraire (*fig.* 43), OG peut dépasser Oz', tandis que OI reste en deçà; le couple est alors positif et tend à appuyer le cône mobile sur le cône fixe.

Troisième cas : $n < 0$. — La rotation instantanée se transforme en une rotation effective quand $n = 0$. L'axe OI coïncide avec Oz et reste immobile à la fois dans le corps et dans l'espace. Seulement, cette ligne n'étant pas axe principal, il faut, pour obtenir cette immobilité, un couple qui détruise le couple d'inertie. Ce couple a le même signe que le mouvement de précession (lequel se confond ici avec la rotation

réelle), dans le cas de l'ellipsoïde aplati; il a un signe contraire dans le cas de l'ellipsoïde allongé (*fig.* 40).

Quant aux cas où la rotation n est négative, ils ne réclament pas une étude spéciale. En effet, une disposition quelconque convient évidemment à deux mouvements de sens opposés, et, si l'un des deux mouvements répond à une rotation positive, à une précession et à un couple dont les signes ont été déterminés par ce qui précède, l'autre répondra à une rotation négative et à une précession de signes contraires. Quant au couple, il conservera le même signe, car le signe de OG et celui de la précession changeront tous deux.

Application au mouvement de la Terre. — La Terre peut être considérée comme un sphéroïde ayant deux moments d'inertie principaux égaux entre eux, et plus petits que le troisième moment principal. Nous avons étudié en Cinématique le mouvement dont ce sphéroïde est animé, en faisant abstraction de la nutation de l'axe, et nous avons reconnu que, la rotation propre étant négative et la précession positive, on rentrait dans le cas de la *fig.* 39, la demi-ouverture du cône fixe étant de 23°27′32″, et celle du cône mobile intérieur étant fort petite.

Nous pouvons actuellement conclure de ces résultats géométriques : 1° que la Terre reçoit à chaque instant l'action d'un couple étranger perpendiculaire à la ligne des nœuds ; 2° que ce couple doit tendre à détacher le cône roulant de la surface du cône fixe, ou, ce qui revient au même, à coucher l'équateur sur le plan de l'écliptique; 3° enfin que l'intensité de ce couple doit satisfaire à l'équation (13).

Si l'on détermine par le calcul, au moyen de la théorie de la pesanteur universelle, la valeur du couple provenant de l'action du Soleil et de la Lune, et tendant à diminuer l'obliquité de l'écliptique, on aura une équation de laquelle on pourra tirer la valeur de quelque quantité plus ou moins incertaine, comme le rapport $\frac{C}{A}$ des deux moments d'inertie principaux de la Terre (*).

(*) POINSOT, *Théorie des cônes circulaires roulants* (*Journal de Mathématiques*, t. XVIII, 1853).



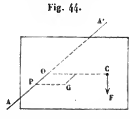
§ XVIII. — Du centre de percussion.

Considérons une force unique F, agissant sur un solide en repos, lequel n'a que la liberté de tourner autour d'un axe fixe, et demandons-nous sous quelles conditions cette force pourra mettre le corps en mouvement sans exercer aucune action sur les appuis de l'axe.

D'après le principe de d'Alembert, l'équilibre doit exister entre les forces d'inertie et les forces extérieures, lesquelles se réduisent à la force F, les appuis ne devant développer aucune réaction. La condition cherchée est donc que les forces d'inertie aient une résultante unique, et que la force F soit directement opposée à cette résultante. Quant à l'intensité de cette force F, il n'y a pas à s'en préoccuper, car la force d'inertie prendra d'elle-même la grandeur convenable pour faire équilibre à la force motrice : l'équation qui exprime cet équilibre est celle qui détermine l'accélération angulaire que doit prendre le corps sous l'action de la force F.

Centre de percussion. — Mais nous savons que, pour que les forces d'inertie aient une résultante unique, il faut et il suffit que l'axe de rotation soit principal en l'un de ses points. Nous avons appelé *centre de percussion* le point d'application de cette résultante, lequel se trouve sur l'intersection du plan principal d'inertie perpendiculaire à l'axe de rotation et du plan passant par le centre de gravité et l'axe (*fig.* 44). H étant

Fig. 44.



le moment d'inertie du corps, par rapport à la droite OA, et a la distance GP, la longueur CO est déterminée par l'équation

$$l = \frac{H}{Ma}.$$

Donc, pour qu'une force unique imprime au corps un mouvement autour d'un axe fixe, sans exercer de pression sur cet axe, il faut et il suffit : 1° que l'axe soit principal en l'un de ses points; 2° que la force soit dirigée dans le plan principal, perpendiculairement au plan qui contient l'axe de rotation et le centre de gravité (cette direction est celle qu'affectera la résultante des forces d'inertie, au moment où, le corps partant du repos, la vitesse angulaire sera nulle); 3° enfin qu'elle soit appliquée au centre de percussion.

C'est en raison de cette dernière propriété que le point d'application de la résultante des forces d'inertie, quand cette résultante existe, a reçu le nom de *centre de percussion.*

Soit K le rayon de gyration pour un axe parallèle à l'axe de rotation et passant par le centre de gravité, on a, d'après la théorie des moments d'inertie,

$$H = Ma^2 + MK^2,$$

et la position du centre de percussion se trouve déterminée par l'équation géométrique

$$(1) \qquad l = a + \frac{K^2}{a}.$$

Cette position ne dépend ni de la masse du corps, ni de la grandeur de la percussion.

Le centre de percussion est toujours plus éloigné de l'axe que le centre de gravité, car $l > a$. Si l'on pose $l - a = h$, on a

$$(2) \qquad h = \frac{K^2}{a}, \quad \text{ou} \quad ah = K^2;$$

le rayon de gyration est donc moyen proportionnel entre les distances du centre de gravité à l'axe et au centre de percussion : les quantités a et h sont réciproques l'une de l'autre. La distance l de deux centres réciproques peut être plus grande que toute ligne donnée; mais elle ne peut jamais être nulle. La moindre valeur qu'elle puisse avoir est la ligne $2K$, car, en cherchant la valeur de a qui répond au minimum de l, on trouve $a = K$, par conséquent aussi $h = K$, d'où $l = 2K$.

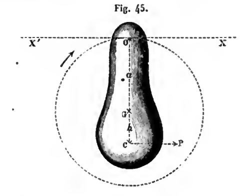
Ces résultats sont indépendants de la grandeur de la force F

et s'étendent tout naturellement au cas où cette force agit avec une grande intensité pendant un temps très-court, de manière à produire ce que nous avons appelé une *percussion*.

C'est ce dernier cas que nous supposerons dans toute la théorie qui va suivre. De plus nous admettrons que le plan principal soit un plan de symétrie du corps; alors un axe quelconque, perpendiculaire à ce plan, est principal pour le point où il perce le plan. Le centre de gravité se trouve évidemment dans le plan de symétrie, sur la droite qui joint le centre de percussion au pied de l'axe, et dans l'intervalle compris entre ces deux points.

Il est facile d'établir directement la théorie du centre de percussion, sans avoir recours à la réduction des forces d'inertie. Pour cela, nous allons commencer par chercher l'effet d'une percussion sur un solide libre, cette percussion étant dirigée d'une manière quelconque dans le plan de symétrie, à une distance h du centre de gravité (*fig.* 45).

Fig. 45.



Abaissons du point G une perpendiculaire sur la direction de la percussion; nous pouvons supposer celle-ci appliquée au pied C de cette perpendiculaire. Cela posé, d'après les lois du mouvement des solides libres, l'effet de la force appliquée en C est double, et nous pouvons déterminer séparément : 1° le mouvement du centre de gravité; 2° la rotation du solide autour de son centre de gravité.

1° Soit u la vitesse finie du centre de gravité, nous détermi-

nerons cette quantité comme s'il s'agissait d'un point matériel de masse M, soumis à une percussion P. Égalant donc à P l'accroissement fini de la quantité de mouvement, il vient

(3) $$Mu = P;$$

2° Soit ω la vitesse angulaire autour du centre de gravité, on a de même, pour déterminer ω, l'équation

(4) $$MK^2\omega = Ph,$$

et le mouvement du solide se trouve connu d'une manière complète.

Axe spontané de rotation. — Considérons, au delà du centre de gravité, un point O, situé à une distance a de G, telle que l'on ait

$$a\omega = u,$$

ou

(2) $$ah = K^2,$$

en remplaçant u et ω par leurs valeurs (3) et (4) : il est clair que le point O est animé d'une vitesse nulle; il se fixe spontanément sous l'influence de la percussion et le mouvement du solide est une simple rotation autour d'un axe projeté en O sur le plan qui contient le centre de gravité et la direction de la percussion.

Le raisonnement que nous venons de faire est celui par lequel Jean Bernoulli a établi le premier l'existence d'un centre spontané ou instantané de rotation dans le mouvement d'une figure placée dans son plan.

Une fois que la percussion a cessé d'agir, notre solide, supposé toujours entièrement libre, conserve indéfiniment la vitesse u de son centre de gravité, et la rotation ω autour de l'axe principal G. On produirait le mouvement fini de ce corps en faisant rouler le cylindre au rayon GO sur son plan tangent XX'. Mais revenons à la question du centre de percussion.

Supposons qu'au moment du choc l'axe O, déterminé par l'équation (2), soit fixé à la manière ordinaire, il est clair que les appuis de cet axe ne seront soumis à aucun effort résultant de la percussion, celle-ci ne tendant pas à déplacer la ligne O. Réciproquement, l'axe O et la distance a étant donnés,

le point où il faut frapper pour n'exercer aucune action sur l'axe se trouve de l'autre côté du centre de gravité, à la distance h.

Quand la percussion est terminée, le corps, se trouvant animé de la rotation ω autour de l'axe fixe O, conservera indéfiniment ce mouvement acquis. L'axe n'a d'autre effort à supporter que celui qui provient de la résultante des forces d'inertie : il conserverait son invariabilité en vertu de la fixité de l'unique point où il est principal.

Cas d'exception. — La solution que nous venons de donner n'est pas applicable au cas où l'axe de rotation contient le centre de gravité, et la rotation autour d'un tel axe ne saurait être produite sans choc sur l'axe que par un couple.

En effet, nous avons trouvé

$$ah = K^2;$$

si donc nous supposons que a diminue indéfiniment jusqu'à amener l'axe de rotation à passer par le centre de gravité, on aura

$$h = \infty \quad \text{et} \quad P = 0.$$

On trouve une percussion nulle appliquée à l'infini ; cela veut dire qu'aucune percussion unique, appliquée où l'on voudra, n'est capable de produire une rotation sur le centre de gravité, sans communiquer en même temps à ce point un mouvement de progression, ou sans ébranler les obstacles qui s'opposent à un pareil mouvement. Il faut donc nécessairement faire agir un couple, pour obtenir une simple rotation sans charge sur l'axe.

Percussion exercée par un solide en mouvement sur un obstacle fixe.

Il résulte de ce qui précède qu'un corps animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe O, perpendiculaire à son plan de symétrie, peut être considéré comme partant du repos, un instant très-court auparavant, et que son mouvement actuel peut être regardé comme provenant d'une percussion P, appliquée au point C.

Réciproquement, on arrêterait le corps en exerçant au

point C une force dont l'impulsion serait égale et contraire à P. Si, au lieu d'appliquer une force, on oppose un obstacle fixe, cet obstacle produira le même effet, en développant pendant un temps qu'on ne peut guère mesurer une réaction dont l'impulsion totale sera P. Le corps perdra à la fois sa translation et sa rotation sans mettre en jeu la résistance de l'axe, de sorte que le résultat obtenu sera le même, que l'axe soit ou non artificiellement fixé. Quant à l'obstacle, il recevra une percussion

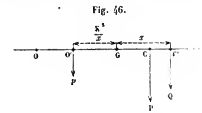
$$(5) \qquad P = Ma\omega = \frac{MK^2}{h}\omega.$$

Tel est l'effet produit par le choc d'un corps M, animé d'une rotation ω sur un obstacle qu'on lui présente à la distance h de son centre de gravité.

Cherchons ce que devient cette percussion, quand l'obstacle se trouve à une distance x du centre de gravité (*).

Décomposition des percussions. — Décomposons la percussion P en deux (*fig.* 46) : l'une Q, appliquée au point C′ situé

Fig. 46.



à la distance x du point G, l'autre p, au point O′ réciproque de C′, c'est-à-dire tel que l'on ait

$$GO' = \frac{K^2}{x}.$$

La percussion p appliquée en O′ ne produit aucun effet sur le point C′, puisqu'on peut, relativement à toute percussion appliquée en O′, regarder le point C′ comme fixe, vu que les deux points par hypothèse sont réciproques; donc la pression

(*) Poinsot, *Questions dynamiques. — Sur la percussion des corps* (*Journal de Mathématiques*, 2ᵉ série, t. XI, 1857, p. 281 et suiv.).

exercée au point C′ sur l'obstacle résultera uniquement de la composante Q qui lui est directement appliquée; cette composante donnera pour l'impulsion totale de la pression cherchée, la décomposition s'exerçant absolument comme s'il s'agissait de forces ordinaires,

$$(6)\qquad Q = P\frac{h + \frac{K^2}{x}}{x + \frac{K^2}{x}} = P\frac{K^2 + hx}{x^2 + K^2}.$$

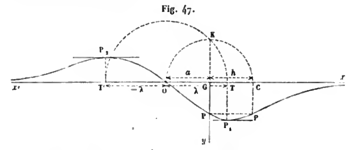
L'autre composante est égale à

$$(7)\qquad p = P\frac{x^2 - hx}{x^2 + K^2}.$$

Si donc on suppose que le corps frappe à la fois deux obstacles, l'un au point C′ capable d'une résistance Q, l'autre au point O′, capable d'une résistance p, le mouvement du corps sera arrêté sans qu'il y ait de pression sur l'axe fixe.

Construisons la courbe qui représente les intensités des percussions telles que Q dans toute l'étendue de la ligne OG supposée rigide (*fig.* 47).

Fig. 47.



Si l'on fait $x = 0$, on a $Q = P$; donc, au centre de gravité comme au centre ordinaire de percussion, la percussion est égale à P. Seulement, dans un cas tout le mouvement se trouve éteint, dans l'autre la translation seule est détruite.

Pour $x = -a$, $Q = 0$.

Entre $x = -a$ et $x = h$, on a une branche de courbe qui présente un maximum pour un certain point T situé entre G

et C. Pour avoir ce maximum, prenons la dérivée de Q, et égalons-la à zéro, nous aurons

$$(K^2 + x^2)h = (K^2 + hx)2x,$$

ou, en divisant par h et ordonnant par rapport à x,

$$x^2 + 2ax - K^2 = 0.$$

Cette équation fournit pour x les deux valeurs

(8) $$x = -a \pm \sqrt{a^2 + K^2},$$

ou, en faisant $\lambda = x + a$,

(9) $$\lambda = \pm \sqrt{a^2 + K^2} = \pm \sqrt{al}.$$

Centre de percussion maxima. — Pour construire ces valeurs, élevons au point G, perpendiculairement à xx' et dans un sens quelconque, une ordonnée $GK = K$, et du point O comme centre, avec OK pour rayon, décrivons une circonférence; le rayon de cette circonférence est égal en valeur absolue à λ. O et C' étant deux centres réciproques quelconques, les trois points O, K, C sont sur une circonférence dont le centre est sur Ox.

Donc la distance à l'axe du point T qui correspond au maximum est moyenne proportionnelle entre la distance du centre de gravité et celle du centre de percussion à l'axe. A gauche du point O, les percussions sont négatives, ce qu'on devait évidemment trouver, puisqu'on est de l'autre côté de l'axe. D'ailleurs elles atteignent un maximum au point T', situé à la même distance de l'axe que le point T, et qui correspond à la solution trouvée précédemment

$$\lambda = -\sqrt{al}\ (^*).$$

Enfin, pour $x = -\infty$, $P = 0$. On a donc une deuxième branche de courbe située au-dessous de OG, ayant comme la première cette droite pour asymptote.

Cas d'une translation simple. — Si l'on n'avait aucune rota-

(*) On peut remarquer que les points T et T' sont réciproques.

tion, c'est-à-dire si l'on posait $h = 0$, on aurait $\lambda = a$, et le centre de percussion maxima se trouverait au centre de gravité.

Cas d'une pure rotation. — Si au contraire on avait une rotation simple autour du centre de gravité, on aurait $a = 0$, et alors

$$x = \pm K,$$

c'est-à-dire que les centres de percussion maxima sont situés de part et d'autre du centre de gravité à une distance égale au rayon de gyration. Comme, dans ce cas, le centre de rotation et le centre de gravité ne font qu'un seul et même point, la direction de OG n'est pas donnée, et le centre de percussion maxima n'est pas un point absolument déterminé comme dans les cas qui précèdent; il est seulement à une distance déterminée du centre de gravité, et par conséquent il peut être pris où l'on voudra sur la circonférence décrite du rayon K autour du centre dont il s'agit.

Si, par exemple, une barre homogène de longueur 2L tourne autour de son centre de gravité, c'est à la distance $\frac{L}{\sqrt{3}}$ du centre de gravité qu'elle frappera le plus fort possible.

Si la barre est remplacée par une sphère ou bille, de rayon R, le rayon de gyration est égal à $R\sqrt{\frac{2}{5}}$, et c'est à cette distance du centre que le globe tournant frappe avec la plus grande force possible

Comparaison entre le choc d'un corps solide en mouvement et celui d'un simple point matériel. — Reprenons les valeurs de Q et de p, qui nous permettent, pour ainsi dire, de dédoubler le centre de percussion, et transformons-les au moyen des équations

$$P = Ma\omega, \quad Ph = MK^2\omega,$$

il vient

$$(10) \quad \begin{cases} Q = \dfrac{MK^2\omega(a+x)}{K^2+x^2} = M\omega(a+x)\dfrac{K^2}{x^2+K^2}, \\ p = \dfrac{M\omega x(ax-K^2)}{K^2+x^2} = M\omega\left(a-\dfrac{K^2}{x}\right)\dfrac{x^2}{x^2+K^2}. \end{cases}$$

Or la vitesse du point C′ est

$$\omega(a+x),$$

et si nous supposons qu'un obstacle fixe soit choqué par un point matériel non élastique de masse μ et de vitesse v, il est évident que μv représente l'impulsion totale de la réaction qu'il développe; donc le point C′ frappe comme si la fraction $\frac{K^2}{K^2+x^2}$ de la masse totale y était condensée (*).

De même, dans l'expression de p, le facteur $\left(a-\frac{K^2}{x}\right)\omega$ étant la vitesse du point O′, on voit que ce point, réciproque au premier, frappe comme si le reste de la masse

$$M\frac{x^2}{K^2+x^2}$$

s'y trouvait concentré.

Donc, en considérant deux centres quelconques réciproques l'un de l'autre, on peut dire que ces deux points frappent exactement comme s'ils se partageaient la masse dans la raison inverse de leurs distances au centre de gravité.

Nous pouvons maintenant étudier la question à un autre point de vue. Le corps mobile, au lieu de frapper par l'un de ses points un obstacle fixe, peut frapper un obstacle de masse M′ supposé en repos et susceptible d'être mis en mouvement. Proposons-nous de calculer la vitesse que prendra cet obstacle. Si l'on désigne par x la distance du point considéré au centre de gravité, nous avons vu que tout se passe comme si une masse $\frac{MK^2}{K^2+x^2}$, animée d'une vitesse $(a+x)\omega$, était condensée en ce point; donc, si w désigne la vitesse commune après le choc de l'obstacle et du corps choquant

(*) Pour $x=0$, cette fraction est égale à 1; il n'y a donc qu'au centre de gravité qu'un corps frappe comme si toute la masse y était condensée. La percussion est la même au centre de percussion, ce qui tient à ce que la diminution de la fraction est compensée par l'augmentation de vitesse.

(tous deux étant supposés non élastiques), on aura

$$\omega' = \frac{\frac{MK^2}{K^2+x^2}(a+x)\omega}{M' + \frac{MK^2}{K^2+x^2}}$$

ou

(11) $$\omega' = \frac{K^2(a+x)\omega}{K^2 + \frac{M'}{M}(K^2+x^2)}.$$

On conclut de là qu'un corps transmet plus de mouvement par son centre de percussion que par son centre de gravité. Mais le centre C de percussion n'est pas le point par lequel le corps transmet au point M' la plus grande vitesse possible, et ce n'est pas non plus le centre T de percussion maxima qui jouirait de cette propriété : c'est un nouveau point dont la distance au centre de gravité dépend du rapport de M' à M.

En prenant la différentielle, on trouvera la valeur de x qui rend cette vitesse un maximum

(12) $$x + a = \pm\sqrt{a^2 + K^2\left(1 + \frac{M}{M'}\right)}.$$

et l'on pourra vérifier que si M' est infini, ce qui correspond au cas d'un obstacle fixe, c'est au centre de percussion maximum qu'on produira le plus grand effet.

Double changement produit par un choc vif sur la vitesse du centre de gravité et sur la rotation autour de ce point. — Nous avons encore à tirer de cette théorie une étude très-intéressante.

Nous avons vu que la percussion P pouvait être décomposée en deux autres Q et p, appliquées l'une à la distance x du centre de gravité, l'autre à la distance $\frac{K^2}{x}$. Nous avions d'ailleurs

$$u = \frac{P}{M}, \quad \omega = \frac{Ph}{MK^2}.$$

Si l'on applique au point C' un obstacle capable d'exercer une résistance Q, il ne restera plus que la percussion p appli-

quée au point O' situé à une distance $-\frac{K^2}{x}$. On aura donc deux nouvelles vitesses u' et ω' données par les équations

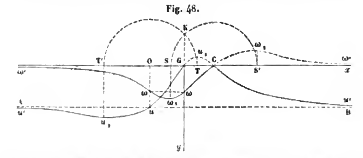
$$(13) \qquad u' = \frac{p}{M} = u\,\frac{x^2 - hx}{K^2 + x^2},$$

et

$$(14) \qquad \omega' = -\frac{p\,\frac{K^2}{x}}{MK^2} = a\omega\,\frac{h - x}{K^2 + x^2}.$$

Construisons les courbes des vitesses u' et ω' (*fig.* 48). La première passe aux points G et C, ce qui est évident *à priori;*

Fig. 48.



entre ces deux points, la vitesse u est négative; puis à gauche du point G et à droite du point C elle est positive. La courbe a pour asymptote des deux côtés la droite AB située à la distance u de G.

On voit à l'inspection de ces courbes qu'en frappant à gauche du point O le centre de gravité se précipite en avant avec une vitesse accélérée; mais la rotation a perdu. Entre les points G et C, la vitesse u' change de signe; il y a réflexion comme si le corps était élastique.

De même, la rotation est accrue par un choc entre O et G; elle éprouve un changement de sens si ce choc est à droite du point C. Les deux points remarquables sont : 1° le point O où un choc ne produit pas le moindre effet; 2° le point C où l'effet est, au contraire, le plus grand possible, puisque tout le mouvement s'y trouve subitement anéanti.

CHAPITRE V.

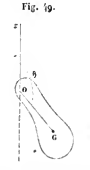
APPLICATIONS DIVERSES RELATIVES A LA DYNAMIQUE DES CORPS SOLIDES.

§ XIX. — Théorie du pendule composé.

On entend par *pendule composé* un corps pesant, de forme et de dimensions quelconques, assujetti à tourner autour d'un axe fixe horizontal qui ne passe pas par son centre de gravité. Nous supposerons d'abord qu'en dehors des réactions de l'axe fixe la pesanteur soit la seule force extérieure agissant sur le pendule.

Désignons par M la masse totale du solide, par a la distance de son centre de gravité à l'axe fixe, par K son rayon de gyration, par rapport à une parallèle à cet axe menée par le centre de gravité, et par θ l'angle que le plan conduit par l'axe et le centre de gravité fait avec le plan vertical d'équilibre dans une position quelconque du pendule (*fig.* 49).

Fig. 49.



Le moment d'inertie par rapport à l'axe fixe a pour valeur

$$M(a^2 + K^2);$$

la somme des moments des poids des différents points matériels de ce solide par rapport à l'axe fixe est d'ailleurs égale au moment du poids total du solide appliqué à son centre de gravité, et a pour valeur

$$Mga \sin\theta ;$$

donc l'accélération angulaire autour de l'axe fixe est

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{ga \sin\theta}{a^2 + K^2}.$$

Le pendule simple n'est qu'un cas particulier du pendule composé; cette équation différentielle pourra donc s'appliquer au mouvement d'un pendule simple de longueur l, et pour cela il suffira d'y supposer $K = 0$ et $a = l$; ainsi l'équation différentielle du mouvement du pendule simple est

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{g \sin\theta}{l};$$

les deux équations, dont l'une se rapporte au mouvement du pendule composé, l'autre au mouvement du pendule simple, deviennent identiques si l'on pose

$$l = a + \frac{K^2}{a}.$$

Donc, si la longueur l d'un pendule simple satisfait à cette condition, les mouvements des deux pendules s'effectueront exactement de la même manière, pourvu toutefois que les circonstances initiales soient les mêmes de part et d'autre. Ainsi les lois du mouvement du pendule composé sont les mêmes que celles du pendule simple.

Si l'on mène une droite parallèle à l'axe de suspension, à une distance de cet axe égale à $a + \frac{K^2}{a}$, et dans le plan qui passe par cet axe et le centre de gravité, tous les points du solide qui se trouvent sur cette droite se meuvent absolument de la même manière que si chacun d'eux était isolé et qu'il fût lié à l'axe de suspension par un fil inextensible et sans masse, dirigé suivant la perpendiculaire qui mesure sa distance à l'axe. Cette droite se nomme l'*axe d'oscillation* du pendule,



et l'on donne le nom de *centre d'oscillation* au point où elle perce le plan perpendiculaire à l'axe de suspension mené par le centre de gravité du solide.

Nous pouvons déduire de là un certain nombre de conséquences intéressantes :

1° L'axe d'oscillation est toujours plus éloigné de l'axe de suspension que le centre de gravité ;

2° Le centre d'oscillation coïncide avec le centre de percussion ;

3° L'axe d'oscillation et l'axe de suspension sont réciproques l'un de l'autre, c'est-à-dire que, si l'on prend pour axe de suspension l'axe d'oscillation, le nouvel axe d'oscillation sera l'ancien axe de suspension.

En effet, la longueur du nouveau pendule synchrone, après le changement de l'axe de suspension, est

$$\frac{K^2}{a} + \frac{K^2}{\frac{K^2}{a}} = \frac{K^2}{a} + a = l.$$

Cette propriété a été mise à profit par M. Kater pour déterminer avec une grande précision la longueur d'un pendule battant la seconde, et par conséquent l'intensité g de la pesanteur.

4° La longueur du pendule synchrone ne change pas quand on prend pour nouvel axe de suspension un axe parallèle au premier et situé à la même distance du centre de gravité.

5° Enfin, si l'on remplace l'axe de suspension successivement par une série d'autres axes qui lui soient parallèles, le minimum de l aura lieu pour $a = K$, c'est-à-dire quand l'axe de suspension est à une distance du centre de gravité égale au rayon de gyration.

Telle est la théorie du pendule composé dans ce qui a rapport à la mécanique rationnelle. Cette théorie est extrêmement importante, puisque c'est au moyen du pendule composé seulement qu'on peut déterminer avec une certaine approximation la valeur de g.

Détermination expérimentale des moments d'inertie. — Maintenant que la valeur de g est bien connue, on peut, en mesurant avec soin la durée des oscillations d'un corps, trouver

la longueur du pendule simple synchrone, et par conséquent le moment d'inertie du corps autour d'un axe quelconque parallèle à l'axe de suspension; mais, dans toutes les expériences faites sur le pendule composé, il faut faire un certain nombre de corrections dues à l'influence des causes perturbatrices, telles que la température qui dilate les corps, l'amplitude des oscillations qui, dans une certaine mesure, influe sur leur durée, etc., etc. Seulement, comme cette influence est très-faible, il suffit d'en avoir une valeur approchée, car une erreur relative assez grande commise sur sa détermination ne produit sur le résultat définitif qu'une erreur très-petite.

Influence du milieu. — La correction la plus importante est celle qui est relative à l'influence du milieu dans lequel oscille le pendule, milieu qui est ordinairement l'air atmosphérique.

Cette influence a un double effet.

1° Il se produit une poussée qui se retranche de la pesanteur. En effet, un corps placé dans un fluide en repos perd, d'après le principe d'Archimède, une partie de son poids égale au poids du fluide déplacé. Si donc M' est la masse de l'air déplacé, le moment des forces de pesanteur n'est plus que

$$(M - M')ga \sin\theta.$$

Le moment d'inertie ne subit d'ailleurs aucune altération; donc on devait mettre

$$l = \left(a + \frac{K^2}{a}\right)\frac{M}{M - M'},$$

et par conséquent, d'après la formule qui donne la durée de l'oscillation du pendule simple,

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

le rapport des oscillations dans l'air et dans le vide est

$$\sqrt{\frac{1}{1 - \rho}},$$

ρ désignant la densité du pendule par rapport à l'air.

Toutefois la formule précédente n'est pas exacte théorique-

ment, parce que le principe d'Archimède n'est vrai que si le corps est en repos dans l'air, et que ce principe, et la correction à laquelle il donne lieu, doivent être modifiés quand le corps est en mouvement; il se produit alors une espèce de remous. On a trouvé empiriquement que la correction précédente était trop forte, et qu'on représentait sensiblement les observations en prenant, au lieu du rapport précédent,

$$\sqrt{\frac{1}{1-f\rho}},$$

f étant un coefficient >1.

Poisson a déterminé approximativement ce facteur et l'a trouvé égal à $\frac{3}{2}$. De nouvelles expériences seraient nécessaires pour vérifier cette valeur.

2° Le milieu influe encore en opposant une résistance directe au mouvement du pendule. Poisson a trouvé les résultats suivants : si α représente l'écart initial, le pendule abandonné à lui-même dépassera la verticale, mais, au lieu de remonter à l'angle α, il ne remontera que d'un angle α_1, donné par la formule

$$\alpha_1 = \alpha - \frac{4}{3}\mu l \alpha^2,$$

en supposant la résistance de l'air proportionnelle au carré de la vitesse, et égale à μv^2.

Dans son oscillation en sens inverse, le pendule remontera de l'angle

$$\alpha_2 = \alpha_1 - \frac{4}{3}\mu l \alpha_1^2,$$

de sorte qu'il finira par arriver au repos, l'amplitude diminuant à chaque demi-oscillation. De plus, la durée de la demi-oscillation descendante est augmentée par la résistance de l'air de

$$\frac{1}{3}\mu l \alpha \sqrt{\frac{l}{g}};$$

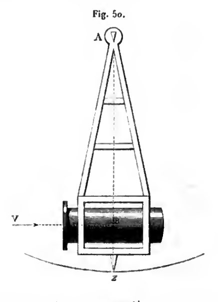
mais le temps de la demi-oscillation ascendante est diminué de la même quantité, de sorte que l'air n'a aucune influence sur le temps d'une oscillation complète. C'est ce que vérifie

assez bien la première loi d'isochronisme des oscillations du pendule que l'expérience ait donnée à Galilée. En effet, cet isochronisme théorique n'aurait pas été vérifié par l'expérience si la résistance de l'air avait influé en raison de la vitesse, qui diminue évidemment avec l'amplitude.

Pendule balistique.

Le pendule balistique est destiné à mesurer la vitesse d'un projectile à sa sortie d'une bouche à feu. Il se compose d'un récepteur en fonte, fixé à un cadre de suspension en fer, lequel peut osciller librement autour d'un axe horizontal A (*fig.* 50).

Fig. 50.



Le récepteur contient une matière compressible dont la fonction est de recevoir le choc du projectile et d'amortir la vitesse de celui-ci sans que la rupture du récepteur puisse avoir lieu.

On connaît la masse μ du projectile, assez petit pour être assimilé à un point matériel; il s'agit, d'après l'effet qu'il produit sur le pendule, d'évaluer sa vitesse V, dirigée suivant l'ho-

rizontale passant par le point connu B, qu'on suppose être le centre de percussion du pendule.

Appliquons le théorème des moments des quantités de mouvement au système formé de l'ensemble du pendule et du projectile, en prenant pour instant initial celui où le pendule est en repos et le projectile animé de la vitesse V, et pour instant final celui où les deux corps se meuvent ensemble avec une vitesse angulaire ω autour de A. Si nous faisons $AB = b$, et si nous appelons I le moment d'inertie du pendule avant sa réunion au projectile, l'accroissement de la somme des moments des quantités de mouvement est

$$I\omega + \mu\omega b.b - \mu V b \quad \text{ou} \quad \omega(I + \mu b^2) - \mu V b;$$

et, attendu que, pendant la très-courte durée du phénomène, on peut négliger les impulsions des forces extérieures, forces dont les moments donnent d'ailleurs une somme presque nulle, on peut poser très-approximativement

$$\omega(I + \mu b^2) - \mu V b = 0.$$

Si ω était connu, on en conclurait V. Or cette vitesse angulaire ω peut se déduire de l'amplitude de la première oscillation que fait le pendule immédiatement après le choc. En effet, à l'instant final du choc, la force vive des deux corps réunis est $\omega^2(I + \mu b^2)$, et, à cet instant, le centre de gravité du système se trouve encore très-peu écarté de la verticale passant par A. Mais dans la première oscillation ce centre de gravité s'élève d'une hauteur H qu'on peut observer, et si l'on désigne par P le poids des deux corps réunis, on a

$$\tfrac{1}{2}\omega^2(I + \mu b^2) = PH, \quad \text{d'où} \quad V = \frac{1}{b\mu}\sqrt{2PH(I + \mu b^2)}.$$

Si l'on appelle P' le poids du pendule sans le projectile, a la distance de son centre de gravité à A; $P'' = \mu g$ le poids du projectile; x la distance à l'axe du centre de gravité des corps réunis; α l'angle avec la verticale de la droite joignant A au centre lors du plus grand écartement du pendule, on a

$$P = P' + P'', \quad x = \frac{P'a + P''b}{P}, \quad H = x(1 - \cos\alpha) = 2x\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha.$$

Pour mesurer l'amplitude de l'oscillation, on fixe au bas du pendule une aiguille dont l'extrémité se meut sur un limbe gradué en poussant un petit curseur qu'elle abandonne quand elle arrive au repos.

Quant au moment d'inertie I du pendule, on le détermine facilement en mesurant le nombre des oscillations effectuées par le pendule avant le choc.

On s'assure qu'on a bien frappé au centre de percussion du pendule, en comptant les nombres d'oscillations effectuées dans un temps donné, avant et après l'expérience. Ces deux nombres doivent être identiques, dans l'hypothèse où nous nous plaçons.

En effet, le centre de percussion, ou centre d'oscillation, est un point où l'on peut supposer concentrée la masse totale du corps solide sans altérer la durée de ses oscillations. Or les lois du mouvement du pendule simple sont indépendantes de la masse du point matériel qui constitue ce pendule simple; donc ces lois restent les mêmes après l'addition d'un corps étranger.

§ XX. — Mouvement d'un cylindre pesant posé sur un plan incliné.

Nous avons étudié en Statique les conditions de l'équilibre d'un rouleau ou cylindre pesant, posé sur un plan horizontal ou incliné, et nous avons donné les lois expérimentales de la résistance au glissement et au roulement, dans le cas de l'équilibre sur le point d'être rompu, ou du mouvement uniforme acquis.

Pour trouver les lois du mouvement varié, il nous suffira d'introduire les forces d'inertie dans les équations de l'équilibre; car nous savons que les équations ainsi obtenues sont toujours en nombre exactement suffisant pour nous permettre de déterminer les lois du mouvement et de calculer les diverses réactions des appuis.

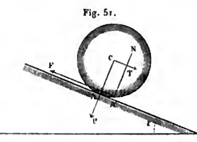
Il importe seulement de faire une sorte de restriction pratique au principe qui nous autorise à considérer, moyennant l'adjonction des forces d'inertie, un problème de mouvement varié comme une question relative à un corps en équilibre.

Le principe de d'Alembert est rigoureusement vrai, et son application est parfaitement légitime, quand on tient compte des forces d'inertie de tous les points matériels qui constituent le système dont on cherche le mouvement; mais nous savons que deux solides naturels en contact se déforment mutuellement, et que, dans l'état dynamique, ces déformations donnent naissance à des vibrations très-rapides, par suite à des forces d'inertie considérables. On arriverait donc à des résultats erronés, si l'on introduisait seulement dans les équations les forces d'inertie calculées comme si les corps que nous appelons *solides* étaient effectivement invariables de forme, en faisant abstraction des mouvements moléculaires qui se combinent avec le mouvement apparent de translation et de rotation pour produire le mouvement réel.

Nous supposerons donc implicitement, dans tout ce qui va suivre, que les déformations des corps étudiés restent très-petites, c'est-à-dire qu'elles sont du même ordre que celles qu'ont observées les anciens expérimentateurs sur les travaux desquels nous nous appuyons pour la théorie actuelle.

Considérons donc (*fig.* 51) un cylindre à génératrices hori-

Fig. 51.



zontales, posé sur un plan d'inclinaison i : soient A la projection de l'arête de contact géométrique, et C le centre de la section droite déterminée dans le cylindre par un plan qui passe par le centre de gravité.

Pour qu'il y ait roulement, il faut que l'arête de contact A ait une vitesse nulle; nous verrons les conditions nécessaires pour que ce mouvement ait réellement lieu. Dans tous les cas, supposons que le roulement soit acquis, et supposons d'abord qu'il ait lieu dans le sens descendant.

Mouvement descendant. — Nous savons que le plan exerce dans ce cas une réaction normale N qui passe en un point A', situé à une distance δ en avant du point A, et qu'en outre il développe généralement aussi une réaction tangentielle F.

Supposons que les forces qui agissent sur le cylindre aient une résultante passant à son centre de gravité, et qu'on ait décomposé cette résultante en deux, une force P perpendiculaire au plan, l'autre T parallèle à ce plan.

Puisque le centre de gravité C se meut suivant une ligne droite parallèle au plan incliné, toutes les forces normales au plan et transportées en ce point doivent avoir une somme nulle; donc on a

$$N = P.$$

Dans le sens parallèle au plan, on a une accélération donnée par la formule

$$(1) \qquad M\frac{dv}{dt} = T - F.$$

Nous savons d'ailleurs que la rotation autour du centre de gravité s'effectue comme si ce point était fixe; donc on a, pour déterminer l'accélération angulaire, la formule

$$(2) \qquad \frac{d\omega}{dt} = \frac{FR - P\delta}{\frac{1}{2}MR^2},$$

en admettant que le corps soit un cylindre homogène, auquel cas son moment d'inertie autour de l'axe C est, comme nous le savons, égal à $\frac{1}{2}MR^2$.

Enfin il nous reste à exprimer une dernière condition résultant de la nature géométrique du mouvement, lequel peut à chaque instant être assimilé à une rotation autour de l'axe A, rotation dont la vitesse angulaire est égale à ω, d'après ce que nous avons établi en Cinématique (t. I, p. 116).

La vitesse v du centre de gravité étant la même que si le corps tournait effectivement autour de l'axe instantané A, on a la relation

$$(3) \qquad v = R\omega.$$

On aurait pu écrire directement l'équation de la rotation au-

tour de l'axe instantané, en appliquant le principe des forces vives, qui ne tient pas compte de la mobilité de l'axe.

En effet, le moment d'inertie autour de l'arête A est la somme de MR^2, moment d'inertie de la masse totale supposée transportée au centre de gravité, et de $\frac{1}{2}MR^2$, moment d'inertie autour de l'axe C. On a ainsi, en considérant un espace de temps infiniment petit, et remplaçant $R\omega$ par v,

$$(4) \qquad \frac{3}{2} M \frac{dv}{dt} = T - P \frac{\delta}{R}.$$

C'est ce qu'on aurait trouvé en éliminant F entre les équations (1) et (2).

Calculons maintenant la valeur de F.

Pour cela, multiplions l'équation (2) par MR, et nous aurons, en tenant compte des équations (1) et (3),

$$T - F = 2\left(F - \frac{P\delta}{R}\right),$$

d'où nous tirons

$$(5) \qquad F = \frac{1}{3}\left(T + 2\frac{P\delta}{R}\right).$$

Pour que le mouvement que nous avons supposé ait lieu, il faut qu'on ait $F < fP$, sans quoi il y aurait glissement.

Faisons une application en supposant que la seule force appliquée au cylindre soit le poids Mg. Si l'on désigne par i l'inclinaison du plan, on aura

$$T = Mg\sin i, \quad P = Mg\cos i,$$

d'où

$$(6) \qquad F = \frac{Mg}{3}\left(\sin i + \frac{2\delta\cos i}{R}\right).$$

Il faut donc, pour que le roulement soit possible, qu'on ait

$$\frac{Mg}{3}\left(\sin i + \frac{2\delta\cos i}{R}\right) < fMg\cos i,$$

ou

$$\tang i < 3f - 2\frac{\delta}{R}.$$

Donc, avant que la tangente de l'inclinaison i devienne le

triple de la tangente de l'angle de frottement, il y a glissement, et l'équation (2) n'est plus applicable.

Mouvement ascendant. — Si nous supposons qu'au lieu de descendre le cylindre roule en remontant sous l'action de la pesanteur et des réactions du plan incliné, les formules que nous avons trouvées subsisteront, en changeant le signe de δ, et l'on a

$$M\frac{dv}{dt} = \frac{2}{3}Mg\sin i + \frac{2}{3}Mg\frac{\delta}{R}\cos i.$$

Dans cette équation, les longueurs parallèles à la ligne de plus grande pente du plan sont toujours comptées positivement de bas en haut; donc la valeur positive de $\frac{dv}{dt}$ correspond à un retard dans le mouvement ascendant. Si, pour plus de simplicité, on néglige $\frac{\delta}{R}\cos i$ devant $\sin i$, l'équation devient

$$(7) \qquad \frac{dv}{dt} = \frac{2}{3}g\sin i.$$

Elle indique que le retard, d'ailleurs uniforme, est seulement les deux tiers de ce qu'il serait si, les résistances passives étant supprimées, le cylindre glissait sans frottement le long du plan d'appui.

Il résulte de cette remarque, et des formules connues qui se rapportent au mouvement uniformément varié, que l'espace parcouru par le centre de gravité du cylindre, depuis l'instant où sa vitesse est égale à v_0 jusqu'au point où il cesse de s'élever, est représenté par

$$\frac{3}{2}\frac{v_0^2}{2g\sin i}.$$

Or cette longueur correspond à une hauteur égale à

$$\frac{3}{2}\frac{v_0^2}{2g},$$

c'est-à-dire à *une fois et demie la hauteur due à la vitesse* v_0.

Ce résultat, qui peut paraître surprenant au premier abord, cessera de nous étonner si nous considérons que la force vive

du cylindre, pour une vitesse v_0 de son centre de gravité, est égale à

$$\frac{3}{2} M v_0^2.$$

On a donc dû, pour communiquer cette vitesse à l'axe du cylindre, dépenser une fois et demie autant de travail que si l'on avait eu affaire à un point matériel de masse M. Réciproquement il faut, pour anéantir cette force vive, que la pesanteur développe une quantité de travail négatif une fois et demie plus grande dans un cas que dans l'autre.

L'expression (6) de la réaction tangentielle F devient, en changeant le signe de δ,

$$F = \frac{Mg}{3}\left(\sin i - 2\frac{\delta}{R}\cos i\right),$$

soit, avec l'approximation que nous admettons,

$$(8) \qquad F = \frac{1}{3} M g \sin i.$$

On peut remarquer que, si le sens de cette force F est tel qu'il corresponde à un ralentissement dans la rotation, d'autre part cette force, transportée au centre de gravité, se présente comme accélératrice du mouvement de ce point.

Quand le poids et la vitesse du corps roulant sont considérables et que la résistance de l'appui est limitée, par exemple quand on considère une locomotive parcourant à grande vitesse un rail ou une poutre de pont à supports discontinus, la théorie qui précède n'est plus applicable. Cette partie de la théorie de la résistance des matériaux est en ce moment tout à fait à l'ordre du jour, et son importance appelle des expériences fort difficiles. Nous indiquerons seulement les deux faits suivants :

1° La flexion de la travée actuellement parcourue par une roue correspond au développement d'une force centrifuge qui s'ajoute à la composante du poids pour produire la charge à laquelle la poutre est soumise.

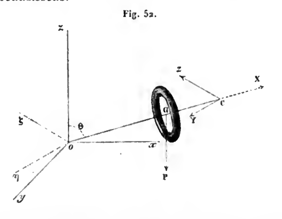
2° Cette même flexion entraîne des flexions en sens inverse sur les travées contiguës : celles-ci prennent une forme con-

vexe, bientôt remplacée par une concavité, et ainsi de suite. Ces alternatives de flexions opposées, que vient compliquer encore le passage des essieux qui suivent celui que nous considérons, sont extrêmement nuisibles à la durée des poutres et à la solidité des assemblages des diverses pièces qui les composent.

§ XXI. — Expériences de Foucault.

Considérons un tore ou un solide de révolution quelconque dont l'axe de figure OC possède un point fixe O (*fig.* 52). Ce point fixe ne coïncidant pas avec le centre de gravité G, situé quelque part sur la droite OC à une distance a de l'origine, le poids P du tore et de son arbre tend à faire tourner le système autour de la *ligne des nœuds;* et si le corps était abandonné à lui-même sans vitesse initiale, il *tomberait* effectivement et se mettrait à osciller comme un pendule, suivant les lois que nous connaissons.

Fig. 52.



Les choses se passent tout différemment quand le tore est animé d'une rotation initiale autour de son axe de figure; et nous savons déjà que, quand le couple agit perpendiculairement à la ligne des nœuds, et qu'une certaine équation de condition est vérifiée, le mouvement du corps se compose d'une rotation et d'une précession uniformes, l'angle de l'axe

de figure avec la verticale OZ restant constant; de sorte que le tore semble entièrement soustrait à l'action de la pesanteur, et suspendu, pour ainsi dire, par l'effet de sa rotation.

La théorie complète des phénomènes que présente le mouvement d'un solide de révolution autour d'un point de son axe se déduit aisément des équations (12) de la page 176. Un des points les plus curieux de cette théorie est la détermination des pressions qui s'exercent sur les appuis d'un axe tel que OC, qui n'est pas fixe (et qui, partant, n'est pas axe réel de rotation). Nous supposerons donc qu'en un point C, situé à une distance l de l'appui fixe, se trouve une sorte de support mobile exerçant sur l'axe une réaction dont les composantes, parallèlement à $O\eta$ et $O\zeta$, sont représentées par Y et Z (*). Nous admettrons enfin qu'en dehors de cette réaction et du poids P aucune force n'agisse sur notre solide.

On a dans ces conditions, en se reportant aux notations du paragraphe XVII,

$$N = 0, \quad N_1 = Pa\sin\theta - Zl, \quad N_2 = Yl.$$

En introduisant ces valeurs dans les équations (12) du même paragraphe, il vient

$$(1)\left\{\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(n + \psi\cos\theta) = 0,\\ &A\frac{d\Theta}{dt} + (C-A)\psi^2\sin\theta\cos\theta + Cn\psi\sin\theta - Pa\sin\theta = -Zl,\\ &A\sin\theta\frac{d\psi}{dt} + (2A - C)\Theta\psi\cos\theta - Cn\Theta = Yl. \end{aligned}\right.$$

Pour discuter ces équations, nous supposerons toujours que la rotation n ait une valeur considérable, conformément à ce qui a lieu dans toutes les expériences. Conséquemment, les termes qui contiennent n en facteur auront sur les phénomènes une influence prépondérante. Les équations (1) peu-

(*) Il est inutile de considérer le cas où cette réaction aurait une composante X dans le sens de l'axe de figure OC, parce que cette force se reporterait sur le point fixe, où elle serait détruite.

vent d'ailleurs être considérées à deux points de vue, et servir à résoudre deux sortes de problèmes :

1° On peut donner les expressions de Y et Z, et demander de déterminer le mouvement qui en résulte pour l'axe OC.

2° On peut obliger l'axe à prendre un mouvement donné, et chercher quelles sont les pressions $(-Y)$ et $(-Z)$ que l'axe exercera sur le corps qui l'oblige à prendre ce mouvement.

Cas singulier d'une précession uniforme. — Nous avons déjà signalé le cas où l'axe OC, sous l'influence d'un couple perpendiculaire à la ligne des nœuds, tourne uniformément en décrivant un cône de révolution autour de l'axe OZ. Or la pesanteur produit précisément un pareil couple, et, si nous supposons que le poids P soit la seule force agissante, nous aurons pour l'équation de condition

$$(2) \qquad (C-A)\psi^2\cos\theta + Cn\psi - Pa = 0.$$

On voit qu'à des valeurs données pour l'angle θ et la rotation n correspondent pour ψ deux valeurs, qu'on obtient par la résolution de l'équation (2)

$$\psi = \frac{-Cn \pm \sqrt{C^2n^2 + 4(C-A)Pa\cos\theta}}{2(C-A)\cos\theta}.$$

Comme nous supposons n très-grand, nous pouvons faire sortir Cn du radical et développer celui-ci en série, en négligeant les termes qui contiennent n^6 en dénominateur; il vient

$$\psi = \frac{Cn}{2(C-A)\cos\theta}\left[-1 \pm \left(1 + 2\frac{(C-A)Pa\cos\theta}{C^2n^2} - 2\frac{(C-A)^2P^2a^2\cos^2\theta}{C^4n^4}\right)\right].$$

ou, en distinguant les deux racines l'une de l'autre,

$$(3) \qquad \psi_1 = \frac{Pa}{Cn} - \frac{(C-A)P^2a^2\cos\theta}{C^3n^3},$$

$$(4) \qquad \psi_2 = -\frac{Cn}{(C-A)\cos\theta} - \frac{Pa}{Cn}.$$

Discutons séparément ces deux racines, qui suivent des lois toutes différentes.

1° La racine ψ_1 a toujours une valeur assez petite; elle croît à mesure que n diminue. Elle change de signe avec la rotation n et avec le moment Pa. On met cette dernière propriété en évidence, en prolongeant l'axe OC en arrière du point fixe et suspendant à ce prolongement un contre-poids dont le moment par rapport au point O peut être rendu à volonté plus grand ou plus petit que le moment du poids du tore. On rend l'expérience plus frappante en donnant à ce contre-poids la forme d'un récipient plein de sable fin, et percé d'un trou à sa partie inférieure. Le poids du récipient et de son contenu l'emporte d'abord sur celui du tore, et la précession est inverse de la rotation; mais bientôt la proportion se trouve renversée par suite de l'écoulement du sable, et la précession se trouve de même sens que la rotation.

La grandeur de ψ_1 est à peu près indépendante de l'angle θ.

2° La racine ψ_2 est, au contraire, très-grande et croît à peu près proportionnellement à n.

Le signe de ψ_2 est indépendant du signe du moment Pa; il est inverse de celui de n, quand C est plus grand que A et que l'angle θ est aigu.

Enfin la valeur de ψ_2 est infinie pour $\theta = 90°$.

Les courbes de la *fig.* 53 donnent les relations qui existent entre n et ψ pour les différentes valeurs de θ. Ces courbes ont été construites à l'aide de l'équation exacte (2). Elles montrent que, quand n diminue et tombe au-dessous d'une certaine limite, l'équilibre devient impossible pour les valeurs de θ rapprochées de 180 degrés, l'ellipsoïde étant supposé aplati. Dans le cas de l'ellipsoïde allongé, ce fait se produirait pour les petites valeurs de θ. On peut, en effet, remarquer que l'équation (2) contient seulement le produit

$$(C - A)\cos\theta,$$

et qu'elle ne change pas quand on change à la fois le signe de $C - A$ et celui de $\cos\theta$.

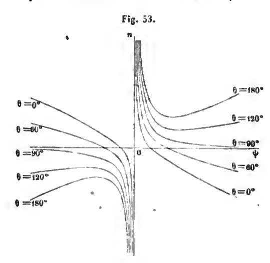
En résumé, si, au moment d'abandonner le point C à lui-même, on lui imprime une vitesse horizontale calculée sur l'une des valeurs de ψ fournies par l'équation (2) ou par le

tableau graphique de la *fig.* 53, les équations (1) seront vérifiées par les valeurs

$$n = n_0, \quad \theta = \theta_0, \quad \psi = \psi_0;$$

cette solution constitue ce qu'on appelle une ***solution singulière*** des équations différentielles simultanées (1).

Fig. 53.



Quand l'équation (2) n'est pas satisfaite par les valeurs initiales de n, θ, ψ, le mouvement n'est plus *permanent*, et nous allons voir ce que devient ce mouvement quand le point C est abandonné à lui-même sans vitesse initiale.

Nous avons vu que, quand le point C est soutenu par un fil attaché par son autre extrémité en un point fixe (*fig.* 25), ce fil reste parfaitement vertical sans qu'il se manifeste aucune tendance à une déviation, soit à droite, soit à gauche. Quant à la tension du fil, facile à mesurer au moyen d'une balance, elle est absolument la même que si la rotation n'existait pas, et se calcule en répartissant, d'après les règles de la Statique, le poids P entre les deux appareils fixes O et C.

Supposons qu'on brûle le fil, de manière à rendre subitement la liberté à l'axe OC, et déterminons, au moyen des équations (1), le mouvement que cet axe va prendre, le poids P

étant la seule force appliquée au corps mobile, indépendamment des réactions du point O (*).

Intégrales du mouvement. — Introduisons dans les équations (1) les hypothèses

$$Y = 0, \quad Z = 0;$$

faisons, pour simplifier l'écriture,

(5) $$\frac{Pa}{A} = \lambda, \quad \frac{C}{A} = \mu;$$

il vient

(6) $$\begin{cases} d(n + \psi \cos\theta) = 0, \\ \dfrac{d\Theta}{dt} + \mu\psi \sin\theta(n + \psi\cos\theta) - \psi^2 \sin\theta\cos\theta - \lambda\sin\theta = 0, \\ \sin\theta \dfrac{d\psi}{dt} + 2\Theta\psi\cos\theta - \mu\Theta(n + \psi\cos\theta) = 0. \end{cases}$$

La première de ces équations a pour intégrale

(7) $$n + \psi\cos\theta = h,$$

h désignant une constante arbitraire.

Les autres intégrales s'obtiennent facilement par l'application des théorèmes généraux de la Dynamique.

1° L'expression de la force vive du corps étant

$$A(\Theta^2 + \psi^2 \sin^2\theta) + C(n + \psi\cos\theta)^2,$$

et le travail de la force P étant

$$\int Pa \sin\theta \, d\theta = - Pa\cos\theta + \text{const.},$$

(*) Il est facile de voir qu'au premier instant le corps obéira, comme s'il ne tournait pas, aux lois de la pesanteur; en effet, on a, à l'instant initial,

$$\Theta_0 = 0, \quad \psi_0 = 0,$$

et ces valeurs, substituées dans les équations du mouvement, donnent

$$\left(\frac{d\psi}{dt}\right)_0 = 0, \quad A\left(\frac{d\Theta}{dt}\right)_0 = Pa\sin\theta_0.$$

l'intégrale des forces vives est, en ayant égard aux notations (5),

(8) $$\Theta^2 + \psi^2 \sin^2\theta = F - 2\lambda\cos\theta,$$

en désignant par F une deuxième constante arbitraire, et confondant dans cette constante le terme

$$\mu(n + \psi\cos\theta)^2 = \mu h^2.$$

2° Nous avons trouvé, pour les projections de l'axe du couple résultant des quantités de mouvement sur les axes mobiles, les valeurs

(9) $$\begin{cases} G_1 = C(n + \psi\cos\theta) = Ch, \\ G_2 = A\Theta, \\ G_3 = A\psi\sin\theta; \end{cases}$$

or, la seule force extérieure P étant constamment parallèle à Oz, la projection de l'axe du couple (9) sur la droite fixe Oz doit rester constante, en vertu du principe des aires. De là notre troisième intégrale, où G représente une nouvelle arbitraire

(10) $$\psi\sin^2\theta + \mu h\cos\theta = G.$$

En introduisant les valeurs initiales

$$\psi = 0, \quad \Theta = 0, \quad \theta = \theta_0,$$

les intégrales (8) et (10) prennent la forme (*)

(11) $$\begin{cases} \left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2 + \psi^2\sin^2\theta = 2\lambda(\cos\theta_0 - \cos\theta), \\ \psi\sin^2\theta = \mu h(\cos\theta_0 - \cos\theta). \end{cases}$$

(*) Ces équations sont remarquables, en ce sens qu'elles sont indépendantes de la densité. En effet, λ et μ en sont indépendants, puisque l'un et l'autre de ces coefficients est égal à une fraction dont les deux termes sont proportionnels à la masse; de sorte que, pour la vérification des résultats, peu importe quelle sera la nature de l'appareil employé. Mais il faut remarquer que l'expérience n'est pas susceptible de mettre bien nettement ce résultat en évidence, parce qu'on est obligé de relier le corps à l'axe par des chapes, c'est-à-dire par d'autres corps qui participent plus ou moins au mouvement, et dont la masse doit entrer nécessairement en ligne de compte, comparée à celle de l'appareil principal.

Éliminons ψ entre ces deux équations; pour cela, multiplions la première par $\sin^2\theta$, et remplaçons $\psi^2\sin^4\theta$ par sa valeur tirée de la deuxième équation; nous aurons

$$\sin^2\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \mu^2 h^2(\cos\theta_0 - \cos\theta)^2 = 2\lambda\sin^2\theta(\cos\theta_0 - \cos\theta),$$

ou

$$(12)\quad \sin^2\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2\lambda\sin^2\theta(\cos\theta_0 - \cos\theta) - \mu^2 h^2(\cos\theta_0 - \cos\theta)^2.$$

Je dis d'abord que, dans le cas où nous nous sommes placés, θ doit différer très-peu de θ_0. En effet, $\mu^2 h^2$ est très-grand par rapport à l'autre terme du second membre; d'ailleurs il est affecté d'un signe —; donc, pour que $\frac{d\theta}{dt}$ soit réel, il faut que le coefficient de $\mu^2 h^2$ soit très-petit, c'est-à-dire que θ diffère peu de θ_0.

Posons donc

$$\theta = \theta_0 + \varepsilon;$$

nous aurons, en négligeant le carré de ε,

$$\cos\theta = \cos\theta_0 - \varepsilon\sin\theta_0, \qquad \sin^2\theta = \sin^2\theta_0 + 2\varepsilon\sin\theta_0\cos\theta_0.$$

Enfin l'on a, d'une manière rigoureuse,

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\varepsilon}{dt}.$$

Substituons ces valeurs dans l'équation (12), il vient, en supprimant les termes de l'ordre ε^2 et divisant les deux membres par $\sin^2\theta_0$,

$$(13)\qquad \left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)^2 = \varepsilon(2\lambda\sin\theta_0 - \mu^2 h^2\varepsilon).$$

Pour que $\frac{d\varepsilon}{dt}$ soit réel, il faut que ε reste au-dessous de la quantité

$$e = \frac{2\lambda\sin\theta_0}{\mu^2 h^2}:$$

c'est la nutation maxima.

Nous pouvons alors écrire

$$\left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)^2 = \mu^2 h^2 \varepsilon(e - \varepsilon),$$

équation qui a pour intégrale

$$(14) \qquad \varepsilon = e \sin^2 \frac{\mu h t}{2}.$$

Si l'on veut avoir la valeur de la précession, on la déduira de l'équation $\psi \sin^2\theta = \mu h(\cos\theta_0 - \cos\theta)$, ou, dans le système d'approximation adopté,

$$(15) \qquad \psi = \frac{\mu h \varepsilon}{\sin\theta_0}.$$

La valeur moyenne de ψ s'obtiendra en remplaçant ε par $\frac{e}{2}$; on aura pour cette valeur moyenne

$$\frac{\lambda}{\mu h} = \psi_1;$$

donc la précession moyenne est égale à celle qui correspond au mouvement permanent.

La solution de la question est fournie par les formules suivantes, qui donnent la précession moyenne et la nutation :

$$\psi_1 = \frac{\lambda}{\mu h}, \quad \varepsilon = e \sin^2 \frac{\mu h t}{2}.$$

L'amplitude de l'excursion totale de l'axe OC dans le sens de la verticale est représentée par

$$e = \frac{2\lambda \sin\theta_0}{\mu^2 h^2},$$

et la durée de cette excursion, ou de la demi-oscillation complète, est donnée par la formule

$$T = \frac{\pi}{\mu h}.$$

Enfin la période des oscillations de ψ coïncide avec celle de θ.

Application numérique. — Pour faire une application numérique, je prendrai les données suivantes :

Je supposerai que le corps de révolution soit un tore en fer dont le cercle générateur a pour diamètre $2\rho = 0^m,01$; le diamètre moyen de l'anneau est, d'un autre côté, $2R = 0^m,12$, enfin $a = 0,185$.

Supposons qu'on imprime à ce tore une vitesse de 6000 tours par minute; cette vitesse est loin d'être exagérée, elle peut être facilement dépassée de beaucoup dans les expériences. Ainsi les projectiles des canons rayés de 4 (montagne) font 6000 tours par minute, et ceux des canons de 4 (campagne) font 8400 tours, la vitesse de translation correspondante étant respectivement 225 et 325 mètres par seconde. En supposant 6000 tours, on a

$$n = 628,32, \quad \text{soit à peu près} \quad h^2 = 400\,000.$$

D'un autre côté, on a pour le volume et les moments d'inertie d'un tore

$$V = 2\pi^2\rho^2 R,$$

$$C = M\left(R^2 + \frac{3}{4}\rho^2\right), \quad A = M\left(\frac{R^2}{2} + \frac{7}{8}\rho^2 + a^2\right),$$

d'où

$$\mu = \frac{8R^2 + 6\rho^2}{4R^2 + 7\rho^2 + 8a^2}, \quad \lambda = \frac{8ga}{4R^2 + 7\rho^2 + 8a^2};$$

soit à peu près

$$\mu = 0,1, \quad \lambda = 50.$$

On a donc, en donnant à $\sin\theta_0$ sa valeur maximum 1,

$$e = \frac{100}{4000} = 0,025.$$

Or

$$1^\circ = 0,0175;$$

donc la nutation maxima est d'environ $1^\circ 26'$: elle est proportionnelle à $\sin\theta_0$. Il n'est donc pas étonnant que l'axe du tore semble décrire un plan : la nutation est si petite qu'elle est insensible.

Cherchons la durée de l'oscillation de l'axe dans son plan

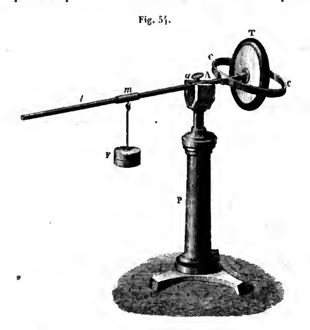
vertical. On a

$$\varepsilon = e\,\frac{\sin^2 \mu h t}{2}.$$

Pour qu'une demi-oscillation s'accomplisse, il faut que le temps varie de $\frac{\pi}{\mu h}$; dans le cas qui nous occupe, on trouve à peu près $\frac{1}{20}$ de seconde. ψ_1 est à peu près sept tours et demi par minute.

On comprend donc que le mouvement de l'axe semble tout à fait uniforme, puisque les écarts de la position moyenne ont aussi peu d'amplitude et une aussi faible durée. L'expérience

Fig. 54.



T tore tournant.
C chape portant l'axe du tore.
A l tige prolongeant de l'axe du tore et portant en m un contre-poids mobile F. Cette tige est montée sur l'axe horizontal ab, qui lui permet de prendre toutes les inclinaisons possibles, et qui lui-même est monté dans cette fourche mobile autour de l'axe vertical du pied P de l'appareil.

confirme pleinement ces indications. Dans la balance gyroscopique de MM. Fessel et Plücker (*fig.* 54), un contre-poids

mobile F permet de vérifier facilement l'inversion du mouvement quand on change le signe du moment, ainsi que tous les autres faits annoncés dans cette leçon.

Il y a encore un autre cas dans lequel les calculs d'intégration s'effectuent sans qu'il s'introduise de fonctions elliptiques : c'est celui où l'on imprime à l'appareil une vitesse initiale ψ_0 très-grande, comparable à la rotation n et telle que l'on puisse négliger $2\lambda(\cos\theta_0 - \cos\theta)$ devant ψ_0^2.

Les formules relatives à ce cas sont

$$(16) \quad \begin{cases} \left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2 + \psi^2 \sin^2\theta = \psi_0^2 \sin^2\theta_0, \\ \psi \sin^2\theta = \psi_0 \sin^2\theta_0 + \mu h(\cos\theta_0 - \cos\theta). \end{cases}$$

La durée de la vibration est plus courte que dans le cas précédent, car on a

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{\mu^2 h^2 + \psi_0^2 \sin^2\theta_0}},$$

et la précession ψ tend vers une valeur moyenne qui diffère peu de la plus grande des deux vitesses qui correspondent à un équilibre stable, ou plutôt à ce que l'on appelle un mouvement permanent.

Cette vitesse est celle que nous avons désignée par ψ_2, et dont la valeur est sensiblement égale à

$$\frac{\mu n}{(1-\mu)\cos\theta}.$$

Ces phénomènes répondent à peu près à ceux que l'on observe dans les premiers instants du mouvement de la toupie. La figure qui donne la loi des valeurs de ψ_2 explique comment, à mesure que cette vitesse est diminuée par les frottements et la résistance de l'air, l'axe se redresse de manière à coïncider promptement avec la verticale, position dans laquelle il se fixe.

Gyroscope. — Un tore animé d'un mouvement de rotation extrêmement rapide constitue la partie principale de divers appareils employés par Foucault sous le nom de *gyroscopes*, pour mettre en évidence, d'une nouvelle manière, la rotation de la Terre.

Les appareils de ce genre, entre les mains de Foucault et

d'un grand nombre d'habiles expérimentateurs qui ont suivi ses traces, servent à un grand nombre d'expériences curieuses, dont la théorie est implicitement comprise dans nos trois équations générales.

Pour étudier en particulier l'influence de la rotation de la Terre, il faudrait tenir compte, dans l'évaluation des couples N, N_1, N_2, des forces apparentes, c'est-à-dire seulement de la force centrifuge composée, puisque la force centrifuge entre comme partie constituante dans la force appelée poids.

Pour calculer la force centrifuge composée, qui est fonction, comme on sait, de la *grandeur* et de la *direction* de la vitesse apparente, il faudrait avoir soin de ne pas oublier que l'axe de figure ne coïncide pas avec l'axe instantané de rotation apparente, puisque celle-ci a respectivement sur nos trois axes des projections représentées par

$$n + \psi \cos\theta; \quad \frac{d\theta}{dt}, \quad \psi \sin\theta.$$

Sans effectuer le calcul, qui nous entraînerait trop loin, je vais donner les expressions des trois couples N, N_1, N_2, composants du couple terrestre. Je conserve les mêmes notations que précédemment, et je désigne par ω la rotation de la Terre prise positivement :

1° Couple normal à l'axe de figure :

$$N = C\Theta\omega \sin\theta;$$

2° Couple normal à la ligne des nœuds :

$$N_1 = -Cn\omega\sin\theta + (A-C)\omega\psi \sin\theta\cos\theta + (A-C)\omega^2 \sin\theta\cos\theta;$$

3° Couple normal au troisième axe :

$$N_2 = A\Theta\omega\cos\theta.$$

S'il s'agit d'un volant ou, en général, d'un corps tournant autour d'un axe maintenu fixe par rapport à la Terre, on a

$$\psi = 0, \ \Theta = 0,$$

d'où

$$N = 0, \quad N_1 = -Cn\omega \sin\theta + (A-C)\omega^2 \sin\theta\cos\theta_1, \quad N_2 = 0,$$

soit à peu près

$$N_1 = -Cn\omega \sin\theta.$$

Les expériences les plus intéressantes sont celles dans lesquelles l'axe d'un gyroscope, dont le centre de gravité est maintenu fixe, est contraint de se mouvoir dans un plan, soit horizontal, soit vertical.

Dans le premier cas, l'axe accomplit des oscillations autour de la méridienne vraie, comme l'aiguille de déclinaison autour de la méridienne magnétique. Les lois de ces oscillations diffèrent sensiblement de celles du pendule simple. Quoi qu'il en soit, le gyroscope fournit un moyen curieux, et non soumis aux mêmes causes perturbatrices que la boussole, de s'orienter en mer quand tous les compas ont été mis hors d'usage par une cause quelconque.

Semblablement, quand on oblige les oscillations à s'effectuer dans le plan du méridien, l'axe devient une sorte d'aiguille d'inclinaison oscillant autour de la parallèle à l'axe du monde, et pouvant, au moins théoriquement, servir à déterminer la latitude du lieu.

Enfin, quand l'axe est entièrement libre et sans vitesse initiale, il tend, en vertu de sa qualité d'axe principal, à conserver une direction fixe dans l'espace; il résultera de cette tendance un mouvement apparent très-lent, en vertu duquel l'axe aurait fait un tour complet autour de la ligne nord-sud en vingt-quatre heures sidérales, si la présence des chapes et l'existence des frottements ne venaient considérablement altérer ce résultat.

Calcul de réactions d'un corps tournant sur un appui mobile.

Supposons maintenant que, la rotation n étant toujours considérable, on agisse sur le point C de manière à faire prendre à l'axe de figure un mouvement obligatoire; les équations (1) nous feront connaître les réactions du corps tournant sur l'appui ou support mobile C. Ces réactions sont égales et de sens contraire aux quantités que nous avons désignées par Y et Z, lesquelles représentent l'action de l'appui sur le corps tournant.

Pour nous faire une idée nette des lois des phénomènes que nous étudions, distinguons un certain nombre de cas simples, en négligeant toujours les termes indépendants de n devant ceux qui sont multipliés par ce facteur.

1° Supposons d'abord qu'on oblige la droite OC à décrire un cône circulaire autour de l'axe Oz, avec une vitesse angulaire représentée par ψ, en projection sur le plan des xy. Supposons en même temps qu'on ait $a = 0$, de manière que la pesanteur soit détruite et que le corps, soustrait à l'effort qui s'exerce au point C, tende à conserver indéfiniment la rotation qui l'anime autour de l'axe principal OC.

Faisons dans les équations (1)

$$\Theta = 0,$$

il vient, avec l'approximation dont nous nous contentons,

$$(17) \qquad Yl = A \sin\theta \frac{d\psi}{dt}, \quad Zl = -Cn\psi\sin\theta.$$

On voit que la réaction principale $(-Z)$ est normale à la direction du mouvement qu'on imprime à l'arbre OC; elle est à peu près proportionnelle à la rotation propre n, et tend à soulever l'appui. Quant à la réaction directement opposée au mouvement, elle est relativement faible et indépendante de l'état de repos ou de mouvement des corps.

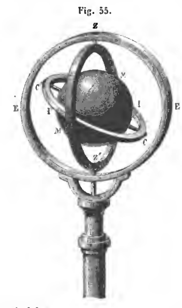
Réciproquement, si l'on veut changer l'orientation de l'axe supposé immobile, il faut exercer sur cet axe un effort ascendant ou descendant Z, selon qu'on veut le faire mouvoir à droite ou à gauche, mais toujours situé dans le plan vertical conduit par cet axe. On a alors, en vertu de la deuxième des équations (17),

$$(18) \qquad \frac{d\psi}{dt} = -\frac{Zl}{Cn\sin\theta}.$$

Supposons la rotation n assez considérable pour qu'on ne voie pas le corps tourner, on sera averti de l'existence de cette rotation en voyant si l'axe de figure, soumis à un effort vertical Z, cède directement à cet effort, ou bien s'il prend au contraire un mouvement latéral. Des phénomènes de ce genre fourniront peut-être un jour des indications sur la rotation des molécules des corps, à la condition qu'on ait un moyen de ramener les axes de toutes ces molécules au parallélisme, afin que les effets concordent et puissent fournir une somme appréciable. En tout cas, il y a là un paradoxe dynamique fort intéressant.

Concevons qu'on tienne à la main l'extrémité C de l'axe : tant qu'on cherche seulement à maintenir l'axe dans une direction invariable, on supporte simplement la fraction du poids déterminée d'après les règles de la Statique, fraction qui ne dépend en aucune façon de la rotation n. Si l'on veut, au contraire, changer l'orientation de l'axe en le faisant tourner autour de la verticale du point d'appui fixe, on ressent une résistance considérable, dont on ne se rend pas parfaitement compte, et qu'on est porté tout naturellement à regarder comme opposée au mouvement qu'on cherche à produire. En réalité, on n'éprouve qu'une résistance insignifiante dans le sens du mouvement, mais une autre au contraire très-forte

Fig. 55.



EE cercle vertical fixe;
ZZ' axe vertical, autour duquel peut tourner la première chape;
MM axe de la seconde chape II';
CC' axe de la sphère mobile.

dans la direction perpendiculaire, résistance qui tend à soulever l'appui artificiel. L'expérience est facile à faire avec l'appareil de Bohnenberger, représenté par la *fig.* 55. Si l'on

cherche à faire tourner la chape zz' B autour de la verticale, on éprouve une résistance très-forte; cette chape paraît solidement fixée, et le seul résultat qu'on obtienne est l'inclinaison de l'axe CC'.

Pour se rendre compte de ce qui se passe dans cette expérience, soit Y l'effort horizontal exercé; on a, par la dernière des équations (1) simplifiée, en négligeant les termes du premier membre qui ne contiennent pas n,

$$-Cn\Theta = Yl,$$

ou

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{Yl}{Cn}.$$

La partie positive de l'axe tend donc à se relever, et la réaction Y est proportionnelle à la vitesse angulaire de ce mouvement de nutation.

Il suit de là qu'on peut réduire considérablement la réaction Y, c'est-à-dire supprimer de son expression le terme proportionnel à n, et cela en s'opposant simplement au mouvement de nutation.

On obtient ce résultat en établissant, au moyen d'une goupille passant dans deux trous convenablement ménagés, une liaison invariable entre les deux chapes, de manière que l'axe CC' conserve seulement la liberté de tourner autour de la verticale zz'.

En effet, si l'on fait $\Theta = 0$ dans les équations (1), nous avons trouvé, pour la loi du mouvement de l'axe en projection horizontale, l'équation

$$A \sin\theta \frac{d\psi}{dt} = Yl,$$

laquelle ne dépend pas de la rotation. Quant à la relation

$$Zl = -Cn\psi \sin\theta - (C - A)\psi^2 \sin\theta \cos\theta,$$

elle donne la charge du goujon que nous avons introduit pour empêcher la nutation.

L'expérience est extrêmement curieuse : les deux chapes étant libres, on éprouve une résistance considérable pour changer la direction de la chape moyenne, et il semble qu'il faille un grand déploiement de force pour faire tourner cette

chape d'un petit angle, en conservant l'inclinaison de l'axe de la sphère.

Introduisons le goujon; on est alors tout surpris que cette liaison nouvelle, cette gêne fasse disparaître pour ainsi dire complétement la résistance dont nous avons parlé. Une légère impulsion fait faire deux ou trois tours à l'appareil, si les pivots z et z' sont bien graissés. Une fois qu'au moyen de cet artifice on a amené la chape M dans un certain azimut, on n'a qu'à supprimer la goupille, et la chape se retrouve aussi solidement fixée dans cette position que dans la première.

Effet d'un couple appliqué sur l'axe de figure d'un corps animé d'un mouvement de rotation rapide.

Pour résumer ce qui précède, nous avons vu que, sous l'effort d'un couple vertical Zl, l'équation du mouvement de l'axe est

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{Zl}{Cn\sin\theta};$$

au contraire, avec un couple Yl, on a

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{Yl}{Cn};$$

on peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Quand un solide de révolution est animé d'un mouvement de rotation considérable autour de son axe de figure, l'effet d'un couple appliqué sur cet axe est de lui communiquer un mouvement de rotation normal au plan du couple.*

Réciproquement : *Quand on oblige l'axe à prendre un certain mouvement dans l'espace, la réaction ou force d'inertie est à peu de chose près perpendiculaire à deux positions consécutives infiniment voisines de l'axe.*

Application au tir des projectiles. — Un projectile oblong, après avoir parcouru un certain espace en dehors du canon, n'a plus son axe de figure tangent à la trajectoire de son centre de gravité, d'où il suit que la résistance de l'air produit sur cet axe des forces qu'on peut considérer approximativement

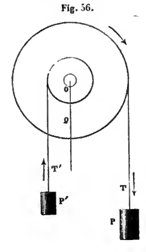
comme équivalentes à une force unique située dans le plan de tir. Cette résultante dépend uniquement de la forme extérieure du projectile, et le signe de son moment autour du centre de gravité dépend de la position de ce dernier point, position dont on est maître, dans une certaine mesure, en disposant de l'évidement intérieur.

D'après ce que nous venons de voir, le couple correspondant fait dévier l'axe de figure hors du plan de tir. La rotation des projectiles étant négative, il résulte de l'équation (18) que la dérivation est de même signe que le moment de la résistance de l'air. Quand la dérivation est à droite du tireur, la résistance de l'air tendrait à relever la pointe du projectile, si la rotation de celui-ci était nulle. Pour ramener l'axe de figure à la position tangentielle à la trajectoire, il faudrait un couple horizontal.

§ XXII. — Théorie de la machine d'Atwood.

Considérons un treuil, mobile autour d'un arbre horizontal O (*fig.* 56), sur lequel sont calés deux tambours ayant la

Fig. 56.



même droite pour axe. Sur chaque tambour est enroulée une

corde qui y est fixée par un bout, et qui tient suspendu à l'autre bout un poids connu. On demande la loi du mouvement qui a lieu, en supposant que le centre de gravité soit dans l'axe O, et que cet axe soit un axe principal d'inertie. Nous négligerons d'ailleurs, pour commencer, le frottement des tourillons sur leurs coussinets, le poids et la roideur des cordes.

Indiquons par des flèches le sens du mouvement, et désignons par Q le poids du treuil, par T et T' les tensions inconnues des cordes.

Nous pouvons traiter la question de deux manières :

1° Nous pouvons introduire les tensions inconnues T et T' et étudier séparément le mouvement des trois corps solides dont se compose alors le système.

Soient : v la vitesse du poids P, v' celle du poids P', R et R' les bras de levier correspondants.

Nous aurons les équations

(1) $$\frac{P'}{g}\frac{dv'}{dt} = T' - P',$$

(2) $$\frac{P}{g}\frac{dv}{dt} = P - T,$$

et

(3) $$\frac{Q}{g}\rho^2\frac{d\omega}{dt} = TR - T'R',$$

en appelant ρ le rayon de gyration du treuil. On a de plus

$$v = R\omega, \quad v' = R'\omega.$$

En remplaçant v et v' par ces valeurs dans les trois premières équations, on pourra ensuite en tirer les valeurs de ω et de T et T'.

Pour cela, multiplions par R' l'équation (1), par R l'équation (2), après y avoir remplacé $\frac{dv}{dt}$ et $\frac{dv'}{dt}$ respectivement par $R\frac{d\omega}{dt}$ et $R'\frac{d\omega}{dt}$, et faisons la somme, nous aurons

$$\left(\frac{P}{g}R'^2 + \frac{P}{g}R^2\right)\frac{d\omega}{dt} = R'T' - RT + PR - P'R',$$

ou, en ayant égard à l'équation (3),

$$\frac{(P'R'^2 + PR^2 + Q\rho^2)}{g}\frac{d\omega}{dt} = PR - P'R';$$

donc enfin

$$\frac{d\omega}{dt} = g\frac{PR - P'R'}{P'R'^2 + PR^2 + Q\rho^2}.$$

On voit que $\frac{dv}{dt}$ et $\frac{dv'}{dt}$ sont tous deux proportionnels à g; c'est la théorie de la machine d'Atwood. Avec cet appareil, on démontre que $\frac{dv}{dt}$ est une quantité constante; par conséquent, l'accélération g, due à la pesanteur, est constante.

2° Nous pouvons aussi appliquer directement le principe de d'Alembert. Pour cela, nous écrirons que le travail virtuel des forces pour un déplacement angulaire $\delta\alpha$ est nul, pourvu qu'aux forces extérieures on ajoute les forces d'inertie.

La force d'inertie du corps P est

$$\frac{P}{g}R\frac{d\omega}{dt};$$

son travail sera négatif et égal à

$$-\frac{P}{g}R^2\frac{d\omega}{dt}\delta\alpha;$$

le travail de la force d'inertie du corps P' est

$$-\frac{P'}{g}R'^2\frac{d\omega}{dt}\delta\alpha;$$

enfin le travail de la force d'inertie du treuil est

$$-\frac{Q}{g}\rho^2\frac{d\omega}{dt}\delta\alpha.$$

Le travail des forces extérieures est

$$PR\,\delta\alpha - P'R'\delta\alpha;$$

donc, enfin, on a

$$PR - P'R' - \frac{P}{g}R^2\frac{d\omega}{dt} - \frac{P'}{g}R'^2\frac{d\omega}{dt} - \frac{Q}{g}\rho^2\frac{d\omega}{dt} = 0,$$

équation qui donnera $\frac{d\omega}{dt}$. On trouve comme précédemment

$$\frac{d\omega}{dt} = g \frac{PR - P'R'}{PR^2 + P'R'^2 + Q\rho^2}.$$

On n'obtient point ainsi directement les tensions T et T'; il faut les déterminer ensuite.

Nous avons négligé, pour établir ces formules, un certain nombre d'actions perturbatrices.

1° *Frottement.* — Le centre de gravité restant immobile, la réaction verticale R des appuis est égale à

$$T + T' + Q.$$

La réaction tangente aux tourillons, c'est-à-dire le frottement, est égale à

$$\frac{f}{\sqrt{1 + f^2}}(T + T' + Q);$$

en multipliant cette quantité par le rayon des tourillons, on aura le moment du frottement; on en conclura la quantité qu'il faut ajouter au travail résistant dans l'équation du mouvement.

2° Quand le corps n'est pas centré ou que l'axe n'est pas principal, les réactions des appuis sont variables avec la position des axes d'inertie; il en résulte des efforts tendant à arracher les paliers. C'est là un grave inconvénient, qu'il faut atténuer le plus possible, mais dont il n'y a pas lieu de calculer l'effet d'une manière précise.

3° La roideur des cordes doit aussi entrer en ligne de compte, surtout lorsqu'il s'agit des câbles goudronnés qui servent à l'extraction des minerais. Il suffit pour cela d'ajouter au moment résistant T'R' un terme de la forme $\frac{1}{2}(A + BT')R'$.

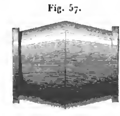
4° Enfin le poids des cordes exerce dans certains cas une influence très-considérable, principalement dans l'extraction du charbon.

Exemple. — A Rive-de-Gier, dans des puits de 300 à 400 mètres, on emploie des câbles ronds goudronnés qui ont 60 à 80 millimètres de diamètre, et pèsent de $2^{kg},50$ à $3^{kg},10$ le

mètre courant. Les tonnes d'extraction contiennent 800 kilogrammes de charbon et pèsent vides 230 kilogrammes; de sorte qu'au départ le poids du câble, qui est de 1200 kilogrammes, s'ajoute au poids de 1030 kilogrammes qu'on a à soulever; il s'en retranche au contraire quand on arrive au jour; de sorte que, sans des dispositions particulières, on serait obligé d'employer la force de la machine à retarder le mouvement des tonnes pleines, entraînées par les tonnes vides jointes au câble déroulé.

A Anzin, les câbles plats ont $0^m,115$ de largeur sur $0^m,003$ d'épaisseur; ils pèsent $4^{kg},19$ par mètre courant; les tonnes contiennent 600 à 700 kilogrammes de charbon de houille et pèsent vides 130 kilogrammes. On voit donc que dans un puits de 200 mètres le poids du câble dépasse celui du contenu de la benne. Comme il n'est pas rare d'avoir des puits d'extraction de 500 mètres et au delà, on voit qu'il y a une grande importance à équilibrer le poids des câbles ou à le compenser au moyen d'un artifice particulier. On y arrive en employant pour les câbles ronds des tambours coniques au lieu de tambours cylindriques (*fig.* 57). Il est difficile d'arriver ainsi à une com-

Fig. 57.



pensation suffisamment complète; aussi s'est-on arrêté généralement à l'emploi de câbles plats, dont les spires successives s'enroulent sur des bobines en se recouvrant mutuellement, ce qui permet de faire varier les bras de levier dans des limites plus étendues. On voit que ces tambours coniques et ces bobines augmentent le bras de levier de la résistance à mesure que cette résistance diminue, et tendent d'une manière utile à régulariser l'effort développé par la machine d'extraction (*voir* t. I, *fig.* 223).

CHAPITRE VI.

DU MOUVEMENT VARIÉ DES MACHINES.

Nous avons d'abord étudié les machines au point de vue géométrique, puis nous avons vu comment elles transmettent le travail des forces dans leur mouvement uniforme, quand on les considère pendant un temps suffisamment long. Il nous reste à nous occuper de leur mouvement varié, c'est-à-dire des perturbations de leur mouvement uniforme. Il est d'ailleurs entendu que nous nous occupons seulement ici des machines dans lesquelles l'emploi de la force et son économie sont une considération importante.

Équation du travail. — L'équation qui donne les circonstances du mouvement des machines est l'équation du travail

$$\Sigma \tfrac{1}{2} mv^2 - \Sigma \tfrac{1}{2} mv_0^2 = T_m - T_r.$$

Si l'on prend cette équation entre deux instants quelconques, elle nous donnera toutes les circonstances du mouvement varié de la machine.

Une machine se compose, nous l'avons déjà dit, de trois parties principales : 1° un récepteur; 2° un outil; 3° une transmission de mouvements.

Du mouvement uniforme. — Nous avons vu quels sont les avantages du mouvement uniforme au point de vue de l'économie de la force, de la conservation des mécanismes et de la bonne exécution du travail; cherchons comment nous pourrons le réaliser avec la plus grande approximation possible.

Il y a trois causes de mouvement varié dans une machine :

1° Irrégularité d'action du moteur;

2° Irrégularité de la résistance (*);

3° Enfin distribution irrégulière des diverses masses en mouvement qui font partie de la machine.

Nous allons nous occuper des moyens le plus en usage pour se garantir de ces trois causes d'irrégularité, ou du moins pour les resserrer dans des limites que la pratique a démontrées être sans inconvénients.

Récapitulons les notions déjà acquises à ce sujet :

1° On doit, conformément à ce que nous avons vu dans la partie consacrée à l'étude géométrique des mécanismes, déterminer le tracé des engrenages et autres organes à rotation continue, de manière à transmettre le mouvement d'un arbre à un autre avec une uniformité parfaite, et non plus seulement avec une régularité périodique, ce qui arriverait si les dents avaient des formes quelconques, mais constantes.

2° Les roues doivent être parfaitement centrées, sans quoi la pesanteur produirait alternativement un travail positif et un travail négatif, et, à moins que le moteur ne soit lui-même irrégulier dans un sens convenable pour compenser cet effet, il y aurait une variation de vitesse.

3° Mais cela ne suffit pas : il faut encore équilibrer avec soin les forces d'inertie comme dans le cas des meules; nous avons vu, en effet, que quand l'axe de rotation n'est pas un axe naturel, il tend à changer de position dans l'espace, et par conséquent à arracher les supports qui s'opposent à ce mouvement, ce qui ne peut manquer de produire sur la machine des effets désastreux.

4° La loi de l'uniformité du mouvement exclut tout à fait les pièces à mouvement alternatif. Les efforts des bons constructeurs et des mécaniciens instruits doivent tendre autant que possible à n'employer partout que des pièces à rotation continue et autant que possible uniforme, ainsi qu'à proscrire

(*) Ces deux causes d'irrégularité peuvent d'ailleurs se compenser, et dans toutes les machines où la résistance est irrégulière, le moteur doit toujours être pourvu d'un organe spécial dit *régulateur*, dont l'office est de proportionner à chaque instant la puissance motrice à la somme des résistances à vaincre.



toute action intermittente de la part du moteur et des résistances : c'est ce qu'on n'a pas encore résolu d'une manière pratique relativement aux machines à vapeur. Il faut au moins, comme nous l'avons dit en Cinématique, que le tracé des divers mécanismes à mouvement alternatif soit tel que toutes les pièces de ce genre prennent et éteignent graduellement leur vitesse au commencement et à la fin de chaque oscillation. Enfin, quand on aura des pièces de poids considérable animées d'un mouvement alternatif, il faudra autant que possible leur ajouter des contre-poids convenables, comme nous le verrons dans le cas des machines d'épuisement et des machines à vapeur.

Enfin, toutes ces conditions géométriques étant supposées remplies, au moins pour les pièces principales de la machine, l'uniformité du mouvement est subordonnée à l'égalité qui doit exister à tous les instants entre le travail moteur et le travail résistant. Généralement cette égalité n'a lieu que périodiquement, et le mouvement est périodiquement uniforme. Ce qu'on appelle régulariser un pareil mouvement, c'est en limiter les irrégularités.

Les principaux appareils qu'on emploie à cet effet sont les *volants*, dont nous allons donner la théorie générale.

§ XXIII. — Théorie des volants.

Dans toute machine à mouvement périodiquement uniforme, quelle que soit l'irrégularité d'action des moteurs et des résistances, on peut toujours, au moyen d'un volant convenable, restreindre les variations de vitesse dans des limites inoffensives.

En général, quand un système matériel dont les éléments ont des vitesses qui croissent ou décroissent ensemble possède une grande force vive, il peut recevoir dans un temps déterminé un travail moteur notablement différent du travail résistant, et ne subir qu'une variation peu sensible de vitesse.

Considérons par exemple un excédant de travail moteur égal à ΔT, développé pendant une certaine fraction de la pé-

riode de la machine, et soit à l'instant initial

$$K = \frac{1}{2}\Sigma mv^2$$

la demi-force vive correspondant à la vitesse de régime. Imposons-nous la condition que les vitesses varient seulement d'une fraction de leurs valeurs normales représentée par $\frac{1}{n}$, la demi-force vive deviendra dans cette hypothèse

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 K,$$

et l'accroissement

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}+2\right)K$$

devra être précisément égal à ΔT. Cette condition détermine la demi-force vive normale K, et l'on voit que, la vitesse v étant déterminée par d'autres considérations, c'est en choisissant convenablement les facteurs m qu'on régularisera les écarts de la vitesse.

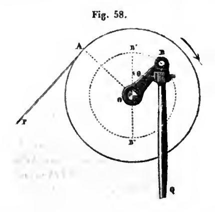
On est ainsi conduit à introduire dans la machine des masses d'autant plus considérables qu'on a besoin de plus de régularité; et pour cela le mode le plus généralement employé dans les machines de rotation consiste dans l'emploi d'un *volant*, calé sur l'un des arbres de la machine. L'action régularisatrice d'un volant est en raison de son moment d'inertie et du carré de sa vitesse angulaire; il est donc avantageux, à ce point de vue, d'augmenter son rayon pour diminuer son poids, et de l'installer sur l'arbre qui tourne avec le plus de rapidité.

L'addition d'un volant convenablement calculé aura donc pour effet d'empêcher la machine de s'emporter sous l'influence d'un excès du travail moteur sur le travail résistant. Semblablement, une prédominance des résistances pourra se manifester sans ralentir par trop la machine; mais il ne faut pas oublier que nous supposons expressément que ces deux effets opposés se compensent au bout de chaque période, la supériorité appartenant alternativement à la puissance et à la résistance, sans quoi la vitesse de régime serait altérée, et il faudrait chercher un autre moyen que le volant pour ramener les choses dans leur état normal.

Nous considérerons donc uniquement, dans les calculs qui vont suivre, les variations régulières qui résultent du mode d'action des forces mises en jeu, et nous calculerons, dans les cas qui se rencontrent le plus fréquemment dans la pratique, les proportions d'un volant capable d'atténuer les effets nuisibles de ces variations sur la bonne exécution du travail à effectuer.

Considérons un arbre tournant O (*fig.* 58), que nous prendrons horizontal pour fixer les idées. Nous supposerons d'abord,

Fig. 58.



pour ne pas compliquer le problème, que les diverses résistances soient constantes, et qu'elles agissent d'une manière continue, tant sur le treuil dont l'axe est O que sur les autres treuils avec lesquels l'arbre O est en rapport constant de vitesses. Par suite, nous pourrons remplacer toutes ces résistances par une force unique F, tangente à un cercle de rayon A, pris à volonté, de manière seulement que le produit $2\pi a F$ soit égal à la somme des travaux résistants développés pour une révolution entière de l'arbre O.

Quant à la puissance, nous la supposerons, comme dans toutes les machines à vapeur, appliquée à un organe animé d'un mouvement alternatif, et transmettant un mouvement de rotation à l'arbre O par l'intermédiaire d'une bielle et d'une manivelle. L'effort moteur Q étant constant, le moment de cet effort varie comme la distance du point O à la bielle BQ, c'est-à-dire comme

le sinus de l'angle θ, compris entre la manivelle et la direction moyenne de la bielle, si nous négligeons les déviations résultant pour la bielle du chemin que l'extrémité opposée au bouton de la manivelle est assujettie à décrire.

Dans ces hypothèses, le moment de la résistance étant constant et égal à Fa, le moment de la puissance est représenté par $bQ \sin\theta$, b étant le rayon du cercle décrit par le bouton de la manivelle. C'est de la variation de ce dernier moment que résulte dans la vitesse angulaire l'irrégularité dont il s'agit de déterminer les lois et d'atténuer l'importance. Il y a deux cas principaux à considérer, selon que la machine est à simple ou à double effet.

Premier cas. — *Calcul du volant d'une machine à simple effet.*

Une machine est dite à simple effet quand l'effort moteur supposé vertical agit toujours dans le même sens, par exemple en descendant, de manière que l'action du moteur est nécessairement intermittente, et s'exerce seulement pendant une demi-révolution de la manivelle. Il développe pendant ce temps un travail égal à $2bQ$, et, si l'on veut que le mouvement soit périodiquement uniforme (*), cette quantité doit être égale au travail de la résistance pour un tour entier, soit à $2\pi aF$. Cette condition détermine le rapport de la puissance à la résistance, et si nous désignons par T le travail dépensé et recueilli pour chaque tour de la manivelle, nous aurons une première relation

$$(1) \qquad T = 2bQ = 2\pi aF.$$

Cette équation étant supposée satisfaite, étudions les lois de la variation de la vitesse angulaire de l'arbre O pendant une

(*) Il est bien entendu qu'au commencement du mouvement de la machine la périodicité n'avait pas lieu, soit que la force Q fût plus grande, soit que les résistances P fussent plus petites que dans l'état supposé par l'énoncé; quoi qu'il en soit, nous admettons que le mécanicien, après avoir mis le moteur en état de fournir le supplément de travail nécessaire pour la mise en train, a réglé sa machine pour le travail normal, la force Q étant celle que fournit l'équation précédente, et le mouvement périodiquement uniforme étant établi.

période, c'est-à-dire pendant une révolution complète de cet arbre.

Il est d'abord bien clair que, tandis que le bouton de la manivelle remonte de B″ en B′, le système étant uniquement soumis à des forces résistantes, la force vive de ce système diminue. Le ralentissement continue encore quelque temps après que le point culminant B′ est dépassé, parce que le moment de la puissance est d'abord très-faible et inférieur à celui de la résistance. L'instant où la vitesse cesse de diminuer et atteint, par conséquent, son minimum, correspond à un angle B′OB, pour lequel les moments des deux efforts contraires Q et F sont égaux. En désignant par θ l'angle B′OB, on a

$$(2) \qquad Fa = bQ\sin\theta,$$

d'où, en ayant égard à l'équation (1),

$$\sin\theta = \frac{1}{\pi}.$$

Cette valeur correspond à deux angles supplémentaires :

$$\theta_1 = 18°33'40'',$$
$$\theta_2 = 161°26'20'';$$

quand l'angle de la manivelle avec OB′ est égal à θ_2, le moment de la force Q, après avoir surpassé le moment Fa pendant assez de temps pour fournir l'excès de travail moteur destiné à compenser la prédominance des résistances pendant le reste de la période se retrouve égal à Fa; la vitesse angulaire atteint son maximum, et diminue ensuite jusqu'à ce que θ repasse par la valeur θ_1.

Soit ω_1 la vitesse angulaire minima, ω_2 la vitesse maxima; appliquons l'équation du travail entre les deux instants correspondants, il vient, H désignant le moment d'inertie du treuil O,

$$\frac{1}{2}H(\omega_2^2 - \omega_1^2) = 2bQ\cos\theta_1 - Fa(\theta_2 - \theta_1)$$
$$= T\left(\cos\theta_1 - \frac{\theta_2 - \theta_1}{2\pi}\right) = 0,551\,T.$$

Désignons par w la moyenne des vitesses extrêmes, et imposons-nous la condition que la différence de ces mêmes vi-

tesses soit une fraction donnée, $\frac{1}{n}$, de la moyenne w, nous aurons

$$\tfrac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1) = w,$$

$$\omega_2 - \omega_1 = \frac{w}{n} \ (^*),$$

d'où

$$\tfrac{1}{2}(\omega_2^2 - \omega_1^2) = \frac{w^2}{n},$$

et

$$(3) \qquad H\frac{w^2}{n} = 0{,}551\,T.$$

Cette équation détermine le moment d'inertie H; on la présente ordinairement, d'après le général Poncelet, sous la forme suivante :

Soit N la *force de la machine en chevaux*, N' le nombre de révolutions par minute. Le travail, pour une révolution, étant représenté par T, on aura par minute N'T, quantité qui devra être aussi égale, d'après la définition du cheval-vapeur, à $60 \times 75 \times N$; donc

$$T = 4500\frac{N}{N'}.$$

Quant au moment d'inertie H, comprenant à la fois les termes qui proviennent des pièces essentielles de la machine et ceux qui correspondent au volant proprement dit, représentons-le par celui d'un anneau de poids Π et de rayon R; enfin désignons par W(**) la vitesse moyenne wR d'un point

(*) Les valeurs des vitesses extrêmes, en fonction de la vitesse moyenne et du coefficient de régularisation, sont

$$\omega_1 = w\left(1 - \frac{1}{2n}\right),$$

$$\omega_2 = w\left(1 + \frac{1}{2n}\right).$$

(**) Il peut y avoir plusieurs volants sur les divers treuils en rapport constant de vitesse avec l'arbre O de la manivelle; alors il faut concevoir que ΠW^2 représentent la somme des poids des éléments de la machine, multipliés respectivement par les carrés des vitesses moyennes de ces éléments. Nous voyons d'ailleurs, en étudiant les transmissions, qu'en pratique le principal volant doit presque toujours faire corps avec l'arbre de la manivelle; sans quoi il arriverait que tantôt cet arbre mènerait le volant, et tantôt serait conduit par lui, ce qui donnerait lieu à des chocs dans l'engrenage de communication.

de cet anneau, il vient en définitive

$$(4)\qquad \mathrm{H}\,\mathrm{W}^2 = 24324\,\frac{n\mathrm{N}}{\mathrm{N}'}.$$

Pour calculer la loi de variation de la vitesse angulaire, il faut appliquer l'équation des forces vives entre une position fixe et une position variable quelconque; seulement on remarquera qu'il y a discontinuité dans l'expression de cette loi, attendu que la force Q agit seulement pendant une demi-révolution, et se trouve supprimée dans l'autre.

Du point B′ au point B″ on a

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\mathrm{H}(\omega^2-\omega_1^2) &= b\mathrm{Q}(\cos\theta_1-\cos\theta)-\mathrm{F}a(\theta-\theta_1)\\ &= \frac{\mathrm{T}}{2}\left(1{,}05-\cos\theta-\frac{\theta}{\pi}\right).\end{aligned}\right.$$

En donnant à θ les valeurs extrêmes zéro et π, on a les vitesses ω' et ω'', qui répondent aux points B′ et B″ :

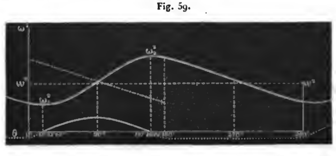
$$\mathrm{H}(\omega'^2-\omega_1^2) = 0{,}05\mathrm{T},$$
$$\mathrm{H}(\omega''^2-\omega_1^2) = 1{,}05\mathrm{T}.$$

Du point B″ au point B′, l'équation est

$$(6)\qquad \tfrac{1}{2}\mathrm{H}(\omega^2-\omega''^2) = -\frac{\mathrm{T}}{2}\left(\frac{\theta}{\pi}-1\right).$$

La *fig.* 59 représente la loi de variation du carré de la vitesse angulaire avec l'angle θ.

Fig. 59.



Quelque défavorables que soient les machines de ce genre,

au point de vue du mode d'action de la puissance motrice, on peut néanmoins, comme on le voit, arriver à régulariser le mouvement tout autant qu'on le voudra; seulement il faudra pour cela employer un volant très-lourd, de sorte que les inconvénients de ces sortes d'engins se trouveront exagérés outre mesure. On diminue beaucoup le poids du volant en répartissant également le travail moteur T dans la durée d'une révolution, comme nous allons le montrer.

Deuxième cas. — *Calcul du volant d'une machine à double effet.*

Pour transformer une machine *à simple effet* en une machine *à double effet*, il faut s'arranger de manière que la puissance Q, dont l'intensité reste constante et la direction verticale, agisse pendant toute la durée d'une révolution de la manivelle. Le sens de cette force doit évidemment changer quand le bouton passe en chacun des points morts B′ et B″, si l'on veut que le moment soit toujours positif.

La force de la machine restant la même, ainsi que la grandeur de la résistance F, la puissance Q sera réduite à moitié, et l'on aura, pour la périodicité, l'équation

$$T = 4bQ = 2\pi a F. \tag{7}$$

La période sera, si l'on veut, d'un demi-tour, au point de vue des variations de vitesse angulaire.

Cherchons, comme dans le cas précédent, les positions du bouton pour lesquelles il y a égalité entre le moment de la puissance et celui de la résistance, et par conséquent minimum ou maximum pour la vitesse angulaire; nous avons toujours

$$Fa = bQ\sin\theta;$$

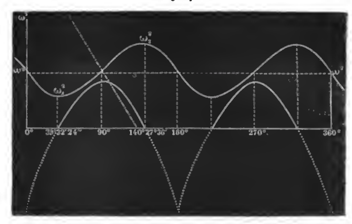
mais cette équation, eu égard à la relation (7), donne

$$\sin\theta = \frac{2}{\pi},$$

$$\theta_1 = 39^\circ 32' 24'',$$
$$\theta_2 = 140^\circ 27' 36''.$$

La première de ces deux valeurs correspond à un minimum, la deuxième à un maximum. Les circonstances du mouvement dans la demi-circonférence B″B′ sont d'ailleurs identiques à celles de la première, comme le montre la courbe (*fig.* 57),


Fig. 57.



et nous nous bornerons à étudier le mouvement pendant un demi-tour.

Les équations qui servent à la détermination du volant sont

$$\tfrac{1}{2}H(\omega_2^2-\omega_1^2) = 2bQ\cos\theta_1 - Fa(\theta_2-\theta_1)$$
$$= T\left(\frac{\cos\theta_1}{2} - \frac{\theta_2-\theta_1}{2\pi}\right) = 0,105\,T,$$
$$H\frac{\omega^2}{n} = 0,105\,T,$$

(8) $$HW^2 = 4645\,\frac{nN}{N'};$$

enfin l'équation qui donne la valeur de ω en un point quelconque est

(9) $$H(\omega^2-\omega_1^2) = T\left(0,605 - \frac{\cos\theta}{2} - \frac{\theta}{\pi}\right).$$

N'oublions pas qu'il y a toujours discontinuité géométrique dans la loi de variation de la vitesse angulaire, bien que cette

discontinuité soit peu apparente sur la *fig.* 57, et que l'équation (9) doive servir seulement pour les valeurs de θ comprises entre zéro et π.

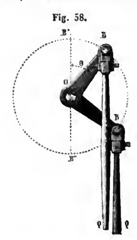
La substitution du double effet au simple effet, par la distribution plus uniforme du travail moteur, permet de diminuer beaucoup le poids du volant qui répond à une valeur donnée du coefficient de régularisation n. Seulement, les machines de ce genre laissent subsister deux points morts, dans les environs desquels le moment de la puissance est extrêmement faible. Comme le moment de la résistance est constant, le démarrage serait impossible dans une portion plus ou moins considérable de la course, sans l'intervention d'une action auxiliaire venant momentanément au secours de la puissance.

On évite cet inconvénient et l'on régularise en même temps le mouvement par l'emploi de deux machines couplées.

Troisième cas. — *Deux machines à double effet accouplées sur un même arbre.*

Deux puissances égales Q sont appliquées à deux manivelles égales, calées sur le même arbre, dans des directions rectangulaires (*fig.* 58). Chacune de ces forces (que nous sup-

Fig. 58.



posons toujours verticales et d'intensité constante) agit de

haut en bas quand le bouton correspondant descend, de bas en haut quand il remonte.

L'équation

$$(10) \qquad T = 8bQ = 2\pi a F,$$

qui tient la place des équations (1) et (7), exprime que le mouvement est périodiquement uniforme, non-seulement pour chaque tour, mais bien pour chaque quart de tour.

Désignons par θ l'angle B'OB correspondant à celle des deux manivelles qui se trouve *en arrière* de l'autre, dans le sens du mouvement; on a, pour la condition de maximum ou de minimum de la vitesse angulaire, l'équation

$$Fa = bQ(\sin\theta + \cos\theta),$$

de laquelle on tire, au moyen de la relation (10),

$$\sin\theta + \cos\theta = \frac{4}{\pi}.$$

Or

$$\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}\cos(45^\circ - \theta);$$

donc

$$\cos(45^\circ - \theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} = \cos 25^\circ 48',$$

$$45^\circ - \theta = \pm 25^\circ 48'.$$

Ces relations montrent qu'il existe dans le premier quadrant deux valeurs de l'angle θ, savoir :

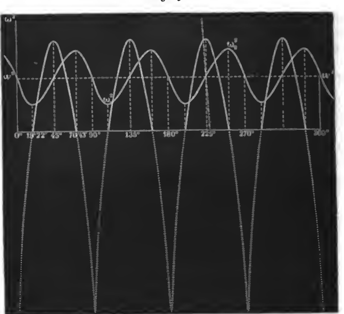
$$\theta_1 = 19^\circ 22',$$
$$\theta_2 = 70^\circ 68',$$

et il n'y a pas lieu, en vertu de la périodicité, de s'occuper de ce qui se passe dans les trois autres quarts du cercle.

Ici nous ne savons plus immédiatement si le minimum de vitesse répond à θ_1 ou à θ_2; pour faire la distinction, nous remarquerons que la somme des moments des efforts moteurs est proportionnelle au facteur $\cos(45^\circ - \theta)$, lequel croît d'une manière constante depuis $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = 45^\circ$, pour diminuer ensuite jusqu'à ce que θ soit devenu égal à 90 degrés.

Aux environs du point B′, et pour les petites valeurs de l'angle θ, le travail moteur est donc inférieur au travail résistant; la machine se ralentit, et la valeur θ_1 ne peut correspondre qu'à un minimum. Ce point une fois dépassé, le moment des puissances surpasse à son tour celui des résistances, le mouvement s'accélère, et θ_2 représente l'instant où cette accélération atteint son maximum.

Fig. 59.



L'équation des forces vives, entre les points (θ_1) et (θ_2), donne

$$\tfrac{1}{2}\mathrm{H}(\omega_2^2-\omega_1^2)$$
$$=b\mathrm{Q}(\cos\theta_1-\cos\theta_2+\sin\theta_2-\sin\theta_1)-\mathrm{F}a(\theta_2-\theta_1)=0{,}01056\,\mathrm{T},$$

$$\mathrm{H}\frac{w'^2}{n}=0{,}01056\,\mathrm{T},$$

(11) $$\mathrm{H}\,\mathrm{W}^2=467\,\frac{n\mathrm{N}}{\mathrm{N}'}\cdot$$

La même équation, pour un angle θ quelconque, est

$$(12)\qquad H(\omega^2 - \omega_1^2) = T\left(0,2605 + \frac{\sin\theta - \cos\theta}{4} - \frac{\theta}{\pi}\right);$$

elle fait connaître la loi du mouvement pour les valeurs de θ comprises entre zéro et 90 degrés, c'est-à-dire pour une période complète.

Non-seulement l'emploi de la manivelle double supprime les points morts, mais on voit, en comparant les équations (11) et (8), que cet emploi permet de réduire à peu près dans le rapport de 10 à 1 (*) le moment d'inertie du volant, sans augmenter la différence des vitesses angulaires extrêmes.

De l'accélération angulaire.

Mais la grandeur de cette différence entre la plus grande et la plus petite valeur de la vitesse angulaire n'est pas la seule chose dont il y ait à se préoccuper, au point de vue d'une marche satisfaisante pour la machine; il faut encore avoir égard au temps qui s'écoule pendant que la vitesse passe d'une limite à l'autre, ou bien à l'accélération angulaire de l'arbre tournant.

En effet, cette accélération angulaire entre comme facteur dans des forces d'inertie qui représentent, soit la tension des courroies de transmission, soit les actions mutuelles des dents d'engrenage, soit enfin les efforts qui tendent à rompre les bras des volants (**).

(*) Les coefficients numériques qui figurent dans le texte ont été calculés en supposant que les bielles restaient constamment parallèles à elles-mêmes : ces coefficients se trouvent nécessairement modifiés, quand on tient compte de l'obliquité variable de la force motrice Q. Ce que nous avons dit suffit pour qu'on puisse se rendre compte des lois du phénomène que nous étudions.

(**) Lorsqu'un volant tourne uniformément, chacun des segments dont la jante est composée exerce sur les bras et sur les autres segments auxquels il est lié des efforts dont la résultante est la force centrifuge due à la masse et au mouvement circulaire de ce segment. Si l'on fait abstraction de la pesanteur, les bras ne sont soumis, dans ce cas, qu'à des efforts longitudinaux.

Il n'en est plus ainsi quand le mouvement est varié : les forces d'inertie tangentielles tendent à fléchir les bras alternativement, dans un sens et dans l'autre, et l'importance de ces forces croît en raison directe de l'accélération angulaire.

Les *fig.* 56, 57 et 59 ont été construites en supposant que, dans les trois cas que nous venons d'étudier, nous disposions du volant de manière à conserver les mêmes valeurs aux vitesses angulaires maxima et minima.

Or les coefficients angulaires des tangentes à nos courbes sont proportionnels aux accélérations angulaires. En effet, on a

$$d(\omega^2) = 2\omega\, d\omega = 2\frac{d\omega}{dt}\,d\theta,$$

d'où

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d(\omega^2)}{d\theta}.$$

On voit, à l'inspection des figures, que l'accélération prend des valeurs de plus en plus considérables à mesure que nous diminuons le volant. C'est ce que montrent encore mieux les courbes spéciales dont l'ordonnée est proportionnelle à $\frac{d\omega}{dt}$, courbes dont les équations sont les suivantes :

1° *Machine simple à simple effet.*

De $\theta = 0°$ à $\theta = 180°$.. $\quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{0,551}\left(\sin\theta - \frac{1}{\pi}\right)\frac{\omega^2}{2n}.$

De $\theta = 180°$ à $\theta = 360°$. $\quad \frac{d\omega}{dt} = -\frac{1}{0,551}\,\frac{1}{\pi}\,\frac{\omega^2}{2n}.$

2° *Machine simple à double effet.*

De $\theta = 0°$ à $\theta = 180°$.. $\quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{0,105}\left(\sin\theta - \frac{2}{\pi}\right)\frac{\omega^2}{2n}.$

3° *Machine double à double effet.*

De $\theta = 0°$ à $\theta = 90°$... $\quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{0,01056}\left(\frac{\sin\theta + \cos\theta}{2} - \frac{2}{\pi}\right)\frac{\omega^2}{2n}.$

Il faut donc, eu égard à ce nouvel ordre de considérations, se garder de diminuer le volant dans le rapport des nombres fournis dans nos formules, quand on substitue un système de machines à un autre, ou, ce qui revient au même, prendre un coefficient de régularisation, selon le cas.

Du coefficient de régularisation. — Nous avons trouvé, pour la vitesse angulaire minima, l'expression

$$\omega_1 = w\left(1 - \frac{1}{2n}\right).$$

Il suit de là que la valeur de $\frac{1}{n}$ est nécessairement inférieure à 2, nombre qui correspondrait à

$$\omega_1 = 0.$$

Il va sans dire qu'on se tient largement au-dessous de cette limite extrême. Ainsi, dans les machines qui, comme celles des filatures de coton, ont besoin d'une grande régularité, on prendra n compris entre 35 et 40 pour les numéros ordinaires, on ira à 50 et même à 60 pour les numéros très-fins. Quant aux moteurs des moulins, des pompes, etc., il suffira de faire $n = 20$ à 25.

§ XXIV. — Influence des masses excentriques.

En supposant le mode d'action de la puissance et celui de la résistance parfaitement réglés, le mouvement uniforme pourra encore être impossible, par suite du mode de distribution des diverses masses en mouvement.

Par contre, on peut s'arranger de manière que cette cause d'irrégularité agisse en sens inverse de celle du moteur ou de la résistance, de manière qu'elles se corrigent l'une par l'autre. Tel est le principe des contre-poids, de ceux, par exemple, qui sont appliqués sur le volant des tours mus par le pied.

Ces contre-poids agissent de deux manières :

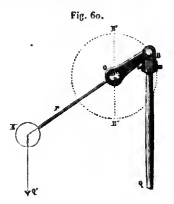
1° Comme poids, ils s'ajoutent alternativement à la force motrice ou à la résistance;

2° Comme masses, ils sont animés d'une certaine force vive qui figure dans la force vive totale de la machine, et cela de deux manières, selon que ces masses excentriques sont animées d'un mouvement circulaire continu, ou d'un mouvement rectiligne progressif ou alternatif.

Contre-poids d'une machine à simple effet. — Les tours ordinaires à pédale nous offrent un exemple d'une machine

dans laquelle la puissance agit à simple effet. Pourtant dans ces appareils, dont l'usage est si répandu (*fig.* 60), on obtient

Fig. 60.



la même loi de mouvement que pour la manivelle à double effet, au moyen d'un *contre-poids* K, dont le centre de gravité est hors de l'axe O, à une distance r, et dont le poids Q' satisfait à la relation $Q'r = \frac{1}{2}Qb$.

Si la force Q est verticale, le rayon r est dans le prolongement de b. Il en résulte que, pendant la descente du bouton, la moitié du travail de Q est neutralisée par celui de C; mais, dans la demi-révolution suivante, la force Q n'agissant plus et le corps K descendant, son poids Q' restitue la moitié du travail de Q. Si la force Q n'est pas verticale, on dispose toujours le rayon OK de manière qu'il soit vertical et qu'il commence à monter à l'instant où le bouton B commence à subir l'action de la force Q.

Dans tous les cas, le moment d'inertie $\frac{Q'r^2}{g}$ du contre-poids est une partie intégrante du moment d'inertie total MR^2, de sorte que le corps excentrique K joue un double rôle : comme poids donnant alternativement lieu à un travail résistant et à un travail moteur, et comme masse diminuant les variations de vitesses.

Contre-poids d'une machine à double effet. — L'utilité du contre-poids pour la manivelle à simple effet fait naître la question de savoir si une disposition analogue ne serait pas

avantageusement appliquée à une manivelle à double effet. Évidemment, dans ce dernier cas, le contre-poids ne pourrait être fixé à l'arbre de la manivelle; car s'il venait en aide à la force mouvante lorsque le bouton de la manivelle serait à l'un des points morts, il deviendrait résistant quand le bouton serait à l'autre de ces points; mais la question reçoit une solution affirmative si l'on place le contre-poids sur un arbre horizontal lié à celui de la manivelle par un engrenage qui l'oblige à faire deux tours pendant que la manivelle en fait un, en fixant le contre-poids de manière que son rayon soit horizontal et en train de descendre, aux instants où le bouton de la manivelle passe aux points morts.

L'étude de cette disposition, qu'on se borne à indiquer ici, montre : 1° que, pendant un tour du contre-poids ou un demi-tour de la manivelle, il y a pour la vitesse angulaire deux maxima et deux minima; 2° que les deux maxima deviennent égaux, ainsi que les deux minima, quand on fait le moment $Q'r$ du contre-poids égal à $0,219Qb$; 3° et que, dans ce cas, le plus avantageux pour satisfaire à la condition de régularisation, $\omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_2 + \omega_1}{n}$, la formule donnée pour le cas de la manivelle à double effet sans contre-poids est remplacée par celle-ci :

$$\Sigma \Pi W^2 = 512 \frac{nN}{N};$$

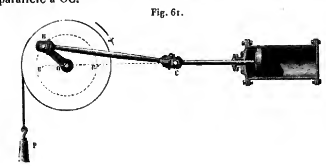
le coefficient numérique est donc environ neuf fois plus petit.

Des masses animées d'un mouvement rectiligne progressif ou alternatif. — Pour donner un exemple de la manière dont ces masses s'introduisent dans les calculs, considérons d'abord le cas d'une machine horizontale à double effet servant à l'extraction du charbon (*fig.* 61).

La résistance sera alors représentée par le poids P, dont le bras de levier sera supposé égal à r, et la puissance Q, supposée constante, sera la résultante des efforts horizontaux qui s'exercent sur les deux faces du piston. Nous négligeons le poids de la corde et celui de la bielle BC, mais nous tiendrons compte de la masse $\frac{P'}{g}$ du piston. Enfin nous supposons la

bielle assez grande relativement au rayon OB de la manivelle pour qu'on puisse la considérer sans erreur notable comme parallèle à OC.

Fig. 61.



La condition du mouvement périodiquement uniforme donne $T = 2\pi r P = 4bQ$.

La force vive du système n'est plus ici proportionnelle au carré de la vitesse angulaire. Le maximum et le minimum de l'une ne répondent plus à ceux de l'autre. Soient l'angle $B'OB = \theta$, et $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ la vitesse angulaire correspondante. En appelant K la demi-force vive à l'instant où $\theta = 0$, on a pour l'équation du travail

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} &\tfrac{1}{2}\omega^2 R^2 M + \tfrac{1}{2}\omega^2 r^2 \frac{P}{g} + \tfrac{1}{2}\omega^2 b^2 \sin^2\theta \frac{P'}{g} - K \\ &\quad = Qb(1-\cos\theta) - Pr\theta = \frac{T}{2}\left(\sin^2 \tfrac{1}{2}\theta - \frac{\theta}{\pi}\right), \end{aligned} \right.$$

d'où, en différentiant,

$$\begin{aligned} &\frac{d\omega}{dt}\,\omega\left(R^2 M + r^2 \frac{P}{g} + b^2 \sin^2\theta \frac{P'}{g}\right) \\ &\quad + \omega^3 b^2 \sin\theta \cos\theta \frac{P'}{g} = Qb\left(\sin\theta - \frac{2}{\pi}\right)\omega. \end{aligned}$$

Le maximum et le minimum de ω exigent donc la relation

$$(2)\qquad Qb\left(\sin\theta - \frac{2}{\pi}\right) - \frac{P'}{g}\,\omega^2 b^2 \sin\theta\cos\theta = 0.$$

Si l'on se donne la vitesse angulaire moyenne $\varpi = \frac{\omega_2 + \omega_1}{2}$ et la condition $\omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega}{n}$, on en conclut $\omega_1 = \varpi\left(1 - \frac{1}{2n}\right)$ et $\omega_2 = \varpi\left(1 + \frac{1}{2n}\right)$. En substituant successivement ces valeurs de ω dans l'équation (2), on obtiendra les valeurs correspondantes de θ_1 et θ_2, l'une plus petite, l'autre plus grande que $\frac{2}{\pi}$. En substituant alors ω_1 et θ_1, puis ω_2 et θ_2 dans l'équation (1), et en retranchant l'une de l'autre les deux équations obtenues, on éliminera K, et l'on aura, pour déterminer R^2M, l'équation

$$\frac{\varpi^2}{n}\left(R^2M + r^2\frac{P}{g}\right) + \frac{1}{2}\frac{b^2P'}{g}(\omega_2^2\sin^2\theta_2 - \omega_1^2\sin^2\theta_1)$$
$$= Qb\left[\cos\theta_1 - \cos\theta_2 - \frac{2(\theta_2 - \theta_1)}{\pi}\right].$$

Remarque I. — Si le piston se mouvait verticalement, il conviendrait que son poids fût contre-balancé par celui d'un corps fixé à la manivelle sur le prolongement de BO.

Remarque II. — La tension de la corde n'est égale à P que lorsque la vitesse angulaire est à son maximum ou à son minimum.

Remarque III. — L'action de la bielle sur la tige du piston au point C est beaucoup plus variable; la vitesse angulaire ω pouvant être considérée comme à peu près constante quand le nombre n, et par conséquent le moment d'inertie, sont assez grands, le maximum de l'accélération du point C a lieu à l'instant du passage aux points morts, et sa valeur est $b\omega^2$; la force totale agissant alors sur le piston est donc $\frac{b\omega^2P'}{g}$.

Considérons en particulier le passage du bouton au point B'; l'accélération du point C et la force $\frac{b\omega^2P'}{g}$ sont dans le sens B'C. Immédiatement avant le passage au point mort, la force Q agit dans le sens contraire. La force F avec laquelle la bielle presse le piston est donc dans le sens B'C et satisfait à

l'équation

$$F - Q = \frac{b\omega^2 P'}{g},$$

ou

$$F = \frac{b\omega^2 P'}{g} + Q.$$

Immédiatement après le point mort, la force Q change brusquement de direction, et la force F, devenant $F = \frac{b\omega^2 P'}{g} - Q$, peut être changée de sens.

Contre-poids des locomotives. — Les masses en mouvement alternatif ont un effet très-fâcheux à cause des forces d'inertie variables qu'elles développent, forces qui troublent périodiquement l'équilibre de la machine et les réactions des appuis, en produisant sur les liaisons des diverses parties de la machine un effet désastreux, surtout lorsqu'il s'agit de machines mobiles comme les locomotives.

Supposons qu'une locomotive soit attelée à un train, et qu'on s'arrange de telle sorte que la puissance soit égale à la résistance, de telle sorte que le mouvement du centre de gravité total soit uniforme. On sait que ce point se meut comme si toutes les forces lui étaient immédiatement appliquées; les forces intérieures se détruisent dans cette translation et n'ont aucune influence sur la position du centre de gravité. Cette position est également indépendante de la situation du point d'application des diverses forces extérieures. Dans le cas où nous sommes placés, le mouvement du centre de gravité est uniforme, et les forces transportées à ce point se font équilibre.

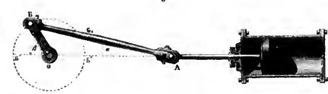
Mais une locomotive se compose de deux parties bien distinctes : l'une, *relativement fixe*, est la réunion du châssis, de la chaudière, etc.; l'autre, *mobile* par rapport à la première, est formée de l'ensemble des essieux, roues, bielles, manivelles et pistons.

Lorsque le centre de gravité de la partie mobile marche relativement en avant ou en arrière, pour que le centre de gravité général conserve son mouvement uniforme obligé, il faut que la partie fixe prenne en sens inverse un mouvement de *tangage* ou de *recul*.

Soient (*fig.* 62)

OB la manivelle;
G son centre de gravité;
AB la bielle;
G_1 son centre de gravité;


Fig. 62.



$OB = r$, $OG = d$, $AB = b$, $AG_1 = \frac{3}{5}b$;
M la masse de la machine entière;
μ celle de la manivelle;
B celle de la bielle;
P celle du piston avec sa tige, le plongeur, etc.;
M′ celle de la partie fixe; soit $M' = M - 2\mu - 2B - 2P$.

A partir du point mort B′, le centre de gravité de la manivelle a marché de

$$d(1 - \cos\beta);$$

celui de la bielle, de

$$r(1 - \cos\beta) - \tfrac{1}{5}b(1 - \cos\alpha);$$

enfin le piston et son attirail, de

$$r(1 - \cos\beta) - b(1 - \cos\alpha).$$

L'angle α étant assez petit, d'après l'équation

$$\sin\alpha = \frac{r}{b}\sin\beta,$$

on a

$$1 - \cos\alpha = \tfrac{1}{2}\sin^2\alpha = \frac{1}{2}\frac{r^2}{b^2}\sin^2\beta.$$

Les quantités qui précèdent deviennent ainsi

$$d(1-\cos\beta),$$

$$r(1-\cos\beta)-\frac{1}{5}\frac{r^2}{b}\sin^2\beta,$$

$$r(1-\cos\beta)-\frac{1}{2}\frac{r^2}{b}\sin^2\beta.$$

Les pièces analogues répondant à la manivelle qui est à angle droit sur la première donnent

$$d\sin\beta,$$

$$r\sin\beta+\frac{1}{5}\frac{r^2}{b}\sin^2\beta,$$

$$r\sin\beta+\frac{1}{2}\frac{r^2}{b}\sin^2\beta.$$

En désignant par x le déplacement du centre de gravité total, on aura

$$M'x=(\mu d+Br+Pr)(1-\cos\beta+\sin\beta),$$

ou, en désignant par m la masse de la manivelle reportée à son extrémité, c'est-à-dire faisant

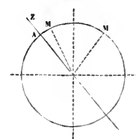
$$mr=\mu d,$$

$$x=\frac{m+B+P}{M'}r(1-\cos\beta+\sin\beta)=p+q\sin(\beta-45^\circ).$$

C'est la loi du mouvement de la projection sur un diamètre d'un point M qui se mouvrait uniformément sur un cercle de rayon q (*fig.* 63). De plus, par suite de la position rectangulaire des manivelles, les mouvements relatifs s'opèrent des deux côtés dans des sens alternativement concordants et opposés; la somme des moments, relativement au centre de gravité général, des forces de recul provenant des deux manivelles, change périodiquement de signe et tend à imprimer à la chaudière un mouvement de lacet sur les rails. Des perturbations analogues se manifestent dans le sens vertical. En effet, lorsque les pièces mobiles s'élèvent ou s'abaissent, la machine tend inversement à s'abaisser ou à se relever, et par

suite, dans le premier cas, à écraser les rails, à laminer inégalement les bandages, et, dans le second, à sortir de la voie.

Fig. 63.



On a cherché à supprimer en tout ou en partie ces effets très-nuisibles, en introduisant de nouvelles masses chargées de compenser à peu près les irrégularités dont nous avons parlé, c'est-à-dire en plaçant convenablement des contre-poids dans les roues de la machine, mais on ne peut pas y réussir complétement; bien plus, dans le principe, on s'était occupé surtout d'annihiler les perturbations dans le sens horizontal: il s'est trouvé qu'on augmentait de cette façon les perturbations dans le sens vertical, qui sont encore plus nuisibles. C'est aux actions de ce genre que sont dus, d'une part, l'usure locale des bandages observée sur les roues munies de trop forts contre-poids; d'autre part, plusieurs déraillements arrivés quand une cause accidentelle quelconque venait à coïncider avec l'instant où la roue se trouvait presque détachée des rails sous l'influence des forces d'inertie verticales.

Des efforts du même genre se développent dans les machines fixes à grandes vitesses; ils ont été moins remarqués parce que, ne pouvant se traduire par un déplacement observable, ils se confondent avec toutes les autres causes de vibrations et d'ébranlement des supports, qui affectent les pièces de la machine.

§ XXV. — Des freins et régulateurs.

Il résulte du paragraphe précédent que, tant que le travail moteur fourni à une machine se trouve périodiquement égal au travail résistant dépensé, on peut toujours, au moyen d'un volant convenablement calculé, atténuer autant qu'on le voudra les irrégularités dont les causes sont pour ainsi dire régulières et se reproduisent à chaque tour en vertu de la constitution géométrique de la machine.

Comme, d'ailleurs, les volants présentent le double inconvénient d'augmenter les résistances passives et, en raison de la force vive qui y est emmagasinée, de gêner beaucoup le mécanicien dans les circonstances où il devient nécessaire d'arrêter la machine le plus promptement possible, il conviendra de n'avoir recours à cet organe qu'après avoir épuisé tous les moyens de régulariser directement l'action de la puissance d'une part, celle de la résistance de l'autre. Quoi qu'il en soit, on trouve dans ce qui précède des ressources suffisantes pour se garantir de tous les effets nuisibles qui résulteraient des variations normales du mouvement d'une machine donnée.

Variations accidentelles. — Mais, indépendamment des variations normales que nous venons d'étudier, il faut encore se tenir en garde contre les variations accidentelles qui peuvent se produire brusquement et à chaque instant, dans un sens ou dans l'autre, sans qu'il soit possible de les prévoir individuellement lors de la construction de la machine.

Ces sortes d'accidents se présentent d'ailleurs, à titre de conditions tout à fait normales, dans les ateliers où une machine motrice unique met en mouvement un nombre variable de machines-outils, chacune de celles-ci étant, à la volonté de son conducteur, embrayée ou débrayée de la transmission générale, selon les besoins des divers services.

Considérons la machine à l'instant où elle est parfaitement réglée pour le mouvement périodiquement uniforme, et supposons pendant un certain temps une augmentation accidentelle du travail des résistances, après quoi celles-ci se replacent

dans leurs conditions normales. Si le travail supplémentaire exigé de la machine n'est pas trop considérable, cette dépense pourra être couverte par la diminution dans la force vive de la machine; celle-ci ne s'arrêtera pas, mais elle marchera à une vitesse plus faible que sa vitesse de régime, et cela jusqu'à ce qu'il se produise une nouvelle variation accidentelle, agissant en sens inverse de la première.

Or nous avons vu combien il était important qu'une machine ne s'écartât pas trop de la vitesse pour laquelle les proportions de tous ses éléments ont été calculées. On obtient ce résultat en se ménageant, quand on fait le projet de la machine, des moyens d'action particuliers sur le moteur, de manière à pouvoir lui faire développer dans l'unité de temps une quantité de travail plus grande ou plus faible que la quantité normale, selon les cas. Les appareils destinés à cette fonction importante sont assez souvent automatiques, d'autres fois ils sont mis en action par le mécanicien chargé de la conduite de la machine : on peut les distinguer en deux classes principales, que nous étudierons successivement sous les noms de *modérateurs* et de *régulateurs*.

Des modérateurs.

Quelque graves que soient les inconvénients résultant pour une machine d'une subite augmentation de la résistance à vaincre, les effets d'une diminution totale de cette même résistance peuvent, dans certains cas, devenir beaucoup plus désastreux et compromettre la vie des personnes qui se trouvent dans le voisinage de la machine. Quand les effets d'une pareille accélération d'une machine tendent ainsi à prendre les proportions d'un accident, il faut se hâter de pourvoir à la sécurité en dépensant le plus vite possible une quantité de travail moteur suffisante pour rétablir l'équilibre détruit.

Les appareils connus sous le nom de freins et de modérateurs permettent de mettre subitement en jeu une résistance passive étrangère qui absorbe sans profit aucun le travail moteur en excès. Les modérateurs ne doivent donc pas figurer dans une machine au même titre que les organes chargés

d'une fonction régulière : ce sont essentiellement des appareils de sûreté.

On peut ranger dans la même catégorie les soupapes dites de sûreté, qui laissent perdre de la vapeur quand la production est trop active, les déversoirs qui laissent écouler en pure perte l'eau qui dépasse la quantité dont on a besoin pour vaincre les résistances actuelles. Il est clair qu'un habile mécanicien pourra remplacer les dispositions précédentes par d'autres, qu'il diminuera, par exemple, l'activité du feu, et par conséquent la dépense de combustible, quand la chaudière produit trop de vapeur, qu'il emmagasinera dans un réservoir l'eau qui se trouve pour le moment en excès. Tels sont les principes sur lesquels sont fondés les régulateurs, auxquels nous arriverons dans un instant.

Nous avons déjà parlé des freins; parmi les organes spécialement connus sous le nom de modérateurs, nous décrirons seulement le volant à ailettes des horlogers.

Volants à ailettes. — On emploie ce petit appareil dans les machines où la question de l'économie du travail moteur est tout à fait secondaire, et peut sans scrupule être sacrifiée à la simplicité et à la commodité de la disposition employée pour régler le mouvement. En voici un exemple :

La sonnerie d'une horloge reçoit son mouvement d'un poids distinct de celui qui produit le mouvement du mécanisme principal; mais, si on laissait tomber le poids librement, son mouvement serait uniformément accéléré, par suite aussi celui du marteau sur le timbre, de sorte que quand l'horloge doit sonner midi, par exemple, les derniers coups du marteau seraient tellement rapprochés qu'ils se confondraient. On évite cet inconvénient en plaçant sur un arbre solidaire de celui qui reçoit directement l'action du poids un *volant à ailettes*, c'est-à-dire un certain nombre de bras terminés par des ailettes disposées de manière à frapper l'air à peu près normalement à leur surface. Ces ailettes reçoivent de la part de l'air une résistance qui croît à peu près comme le carré de la vitesse. Il suit de là que plus la vitesse augmente sous l'influence de la force motrice constante, plus et plus rapidement encore s'accroît la résistance, de sorte qu'il arrive un moment, théoriquement au bout d'un temps infini, pratiquement après

un temps assez court, où le mouvement est devenu sensiblement uniforme. C'est alors que la sonnerie commence.

Il est facile d'approprier à tous les cas ce petit appareil au moyen de quelques modifications très-simples. Si la résistance qu'il éprouve est trop grande, on incline plus ou moins les ailettes; on peut même, si l'on veut, les placer normalement à l'axe, de manière à les présenter à l'air par leur tranche, et alors la résistance de l'air devient très-faible. Aussi sont-ils employés dans un très-grand nombre de machines où l'on a besoin d'un mouvement uniforme, telles que l'appareil Poncelet pour étudier la chute des graves, le tourne-broche, etc.

L'intervention accidentelle d'une résistance trop considérable peut aussi amener des accidents, tels que des ruptures d'organes, etc. On a recours, dans ce cas, soit à un système de débrayage automatique, soit à l'interposition d'une pièce peu coûteuse et facile à remplacer, calculée de manière à casser avant les organes plus importants.

Des régulateurs proprement dits.

Les régulateurs diffèrent des modérateurs en ce qu'ils n'agissent pas toujours dans le même sens; de plus, au lieu d'introduire des résistances inutiles chargées de dépenser un excès de travail moteur, ils règlent la dépense sur les besoins, la diminuant quand l'accélération de la machine les avertit de la diminution des résistances, l'augmentant en cas de ralentissement, mais toujours de manière que le travail moteur consommé soit précisément égal à celui qui est strictement nécessaire pour vaincre toutes les résistances inhérentes au mouvement de la machine.

On peut ranger dans la classe des régulateurs les réservoirs des pompes et des machines soufflantes, les châteaux d'eau d'une distribution urbaine, les gazomètres d'une usine à gaz, le vide qui est au-dessus des chaudières des machines à vapeur. Les fusées des montres, les câbles plats des mines sont encore des régulateurs à un certain point de vue, puisqu'ils régularisent le mode d'action, soit de la puissance, soit de la résistance; mais nous ne leur donnerons pas ici ce nom.

Les régulateurs sont de deux espèces (nous verrons plus

tard leur application aux divers genres de machines). Dans les uns, c'est la main d'un mécanicien qui surveille le mouvement et fait marcher le régulateur au moment convenable (locomotives); dans les autres, la machine se règle d'elle-même.

Ces deux espèces de régulateurs ne sauraient se suppléer. En effet, pour une locomotive, par exemple, il faut nécessairement que le régulateur soit sous la main du mécanicien pour que celui-ci puisse donner toute la vapeur au moment où le train va avoir à gravir une rampe, la réduire au contraire quand on approche d'une station. Dans cet exemple, il faut en outre un modérateur ou frein pour faciliter l'arrêt à un point fixe dans une gare ou dans tout autre endroit quand la sécurité l'exige. Dans les laminoirs, pendant qu'on chauffe les barres de fer à laminer, il est complétement inutile de donner une grande force à la machine, car les cylindres étireurs tournent sans résistance à vaincre autre que les frottements. Il faut, au contraire, lancer la machine et lui donner toute sa vitesse au moment où l'on va commencer à faire passer le métal entre les cylindres, parce que, au commencement, il y aura une résistance énorme à vaincre et presque toujours un choc violent; puis vient la phase du travail normal.

Les machines que l'on règle ainsi à la main sont celles pour lesquelles le mouvement rigoureusement uniforme n'est pas une nécessité absolue.

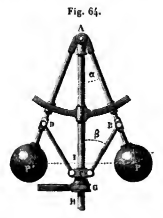
Dans le cas contraire, il est indispensable que, dès que la vitesse vient à s'écarter de la vitesse normale, dans un sens ou dans l'autre, la machine se règle automatiquement, de manière à ramener la vitesse à sa première valeur, et cela avant que l'écart ait atteint des limites nuisibles à la marche de l'opération.

On emploie pour cela, depuis assez longtemps, un petit appareil que Watt appelait *gouverneur*, et qui est généralement connu sous le nom de *régulateur à force centrifuge*.

Régulateur à force centrifuge. — Quatre verges rigides égales deux à deux sont disposées dans un plan et articulées à charnières, savoir : en A sur un arbre tournant vertical AI, en B et en D où elles forment un angle variable, en C sur un manchon qui entoure l'arbre AI le long duquel il peut glisser en faisant varier la figure du quadrilatère symétrique ABCB.

Les points PP sont les centres de deux boules métalliques. Tout le système a, à chaque instant, une même vitesse angu-

Fig. 64.



laire autour de l'axe de l'arbre OD. La position du manchon C variant avec cette vitesse, on se sert de cet appareil, soit pour indiquer, au moyen d'une aiguille, la vitesse angulaire actuelle, soit pour faire mouvoir un levier de manœuvre qui ouvre plus ou moins une soupape d'où dépend le mouvement de la machine principale, soit pour faire fonctionner un manchon d'embrayage alternatif qui fait que le moteur modifie son action pour rétablir la vitesse normale.

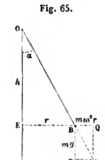
La théorie approximative de cet appareil est bien simple. En effet, supposons l'axe et la tige réduits à de simples lignes rigides dépourvues de masse, et la boule réduite de même à un point matériel. Chacune des boules constitue alors un pendule simple qu'on appelle *pendule conique*, pour le distinguer du pendule ordinaire dont les oscillations sont contenues dans un plan unique.

Cherchons la condition pour que la figure soit invariable de forme.

Soit ω la vitesse angulaire du système (*fig.* 65). Le point B est en équilibre relatif sous l'action de trois forces, son poids mg, la force centrifuge $m\omega^2 r$, et la tension du fil; chacune de ces forces est égale et directement opposée à la résultante des deux autres. Si donc on compose mg et $m\omega^2 r$ par la règle du

parallélogramme, on devra avoir une force BR égale et directement opposée à la tension de OB, située par suite dans le

Fig. 65.



prolongement de OB. Or les triangles OEB, BPR sont semblables, et l'on a

$$\frac{\omega^2 r}{g} = \frac{r}{h},$$

d'où l'on tire

$$h = \frac{g}{\omega^2}.$$

Cette condition étant satisfaite, le pendule avec tout son attirail articulé tournera autour de l'axe comme un corps solide, la tige OB décrivant un cône droit dont le demi-angle au sommet est déterminé par l'équation

$$\cos\alpha = \frac{h}{l} = \frac{g}{l\omega^2}.$$

Ces formules sont indépendantes de la masse des boules. Elles montrent qu'à chaque vitesse angulaire ω répond un écart normal des boules. Si la vitesse angulaire augmente ou diminue, les boules tendront à s'écarter ou à se rapprocher de l'axe, et dès lors, quand même on négligerait les poids et les forces centrifuges des diverses tiges, il est évident que la masse des boules, comparée à celle des pièces qu'elle entraîne dans son mouvement, doit avoir une grande influence sur le mouvement que prendra le manchon, mouvement dont dépend la régularisation cherchée.

De plus, lorsque l'appareil sera en équilibre avec une certaine vitesse angulaire ω, il ne changera pas de position pour une faible variation de vitesse angulaire, parce que cette variation fait naître une force insuffisante pour vaincre les résistances passives de l'appareil, telles que le frottement du manchon sur l'arbre et celui des articulations.

Pour étudier la question complétement, voici ce qu'il faudrait chercher :

1° ω étant la vitesse normale de l'appareil, quelles seront les vitesses angulaires ω' et ω'',

$$\omega' < \omega < \omega'',$$

pour lesquelles le manchon commencera à se mettre en mouvement, soit en montant, soit en descendant?

2° On devra aussi évaluer à un autre point de vue le degré de sensibilité de l'appareil. Les vitesses angulaires ω' et ω'' ayant été dépassées, à quelle hauteur s'élèvera le manchon pour une variation de vitesse angulaire donnée. Pour que l'appareil soit sensible, il faut que pour de faibles variations de vitesse angulaire il se mette en mouvement, et que, pour une variation donnée, le mouvement d'écart soit assez grand pour que l'action sur le moteur suffise à ramener la vitesse à sa valeur normale.

Je renverrai au Cours professé à l'école de Metz par le général Poncelet (1836, Section II, p. 13 et 14), pour les développements de cette question. Je ferai seulement remarquer que la tendance actuelle des praticiens est d'employer des boules très-petites et de donner au manchon un poids très-considérable.

Dans le régulateur Porter, de New-York, la surcharge du manchon est de 85 kilogrammes, sous forme d'une urne montant et descendant le long de l'axe. La vitesse des boules est très-grande, environ 300 tours par minute.

Dans cet ordre d'idées, il n'y a pas d'inconvénients à faire tourner le régulateur autour d'un axe horizontal. La surcharge est alors produite par un ressort qui remplace le poids dont nous venons de parler.

Inconvénients du régulateur ordinaire. — Le problème que le régulateur d'une machine est appelé à résoudre est le sui-

vant : *maintenir la vitesse d'une machine rigoureusement égale à sa vitesse de régime, quelles que soient les variations du travail moteur dépensé.*

Or il est facile de voir que, même en mettant à part les questions de sensibilité, le principe du régulateur que nous venons de décrire est directement opposé à la réalisation de cette condition. En effet, supposons que cette vitesse de régime soit de 30 tours : si le travail résistant vient à diminuer, la machine s'accélérera et le régulateur viendra fermer plus ou moins l'orifice d'admission de l'eau ou de la vapeur, par cela seul que les boules se seront écartées au premier accroissement de vitesse. Le moteur produira alors moins de travail dans l'unité de temps en vertu de cette fermeture partielle de l'admission; mais si cette fermeture de l'orifice est celle qui convient au nouveau régime de travail de la machine, il ne sera pas possible de maintenir à la fois l'ancienne vitesse et le nouveau travail, puisque ces deux éléments sont absolument liés entre eux, l'ouverture convenable de l'orifice ne convenant qu'à la position des boules qui correspond à une vitesse différente. Pour que le nouveau régime de travail pût s'établir avec l'ancien régime de vitesse, il faudrait que les boules pussent indifféremment se maintenir à tous les degrés d'écartement possibles, du moment que la vitesse de la machine est celle pour laquelle l'appareil a été réglé, les boules conservant d'ailleurs leurs propriétés ordinaires au point de vue de l'ouverture et de la fermeture de l'orifice.

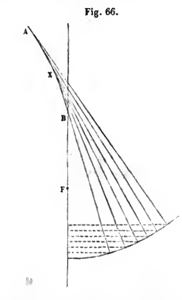
Si un tel régulateur pouvait être construit, chaque augmentation de vitesse amènerait une fermeture de l'orifice, mais la vitesse convenable pourrait encore être maintenue avec cette fermeture.

Régulateurs paraboliques. — Or, si l'on se rapporte à la formule $h = \frac{g}{\omega^2}$, on voit que, la vitesse ω étant donnée, l'appareil sera en équilibre, quelle que soit la position des boules, pourvu que la hauteur h reste constante. Or h est la sous-normale de la courbe décrite par les boules; donc il faut que cette courbe soit une parabole, qui est d'ailleurs facile à construire. C'est sur cette propriété qu'on a basé la construction des *régulateurs paraboliques* dans lesquels les boules, au

moyen de galets convenablement placés, ne pouvaient jamais quitter la parabole déterminée précédemment; les galets développaient des frottements inutiles qui ont fait abandonner ce système. D'ailleurs MM. Farcot réalisent aujourd'hui le même principe d'une manière suffisamment approximative, en remplaçant la parabole par un arc de cercle qui s'en rapproche autant que possible dans les limites des déplacements que les boules peuvent effectuer.

Régulateur à bras croisés. — Construisons la parabole théorique, et menons un certain nombre de normales. Ces droites

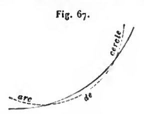
Fig. 66.



sont tangentes à la développée de la parabole sur laquelle la tige, si elle était flexible, devrait s'enrouler pour que les boules décrivissent la parabole. Cela posé, pour avoir un cercle convenable, il suffit de déterminer la portion utile AB de la développée et de remplacer l'arc de parabole par un arc de cercle ayant son centre en un point X intermédiaire entre les points A et B. Ce centre X étant situé de l'autre côté de l'axe par rapport aux boules, les bras qui supportent celles-ci se trouvent croisés.

D'après la disposition géométrique des lignes de la figure, le cercle fait saillie hors de la parabole vers le milieu de l'arc,

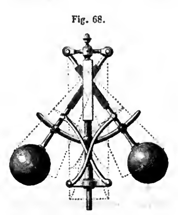
Fig. 67.



et pénètre au contraire dans la courbe vers ses extrémités. Il résulte de ces circonstances que, pour les positions extrêmes, la hauteur *h* est trop petite, et, par conséquent, le mouvement de rotation normal du pendule tendrait à s'accélérer; mais une disposition particulière est prise pour parer à cette légère cause de perturbation.

Les deux bielles qui sont articulées sur les boules et transmettent le mouvement au manchon sont aussi croisées.

Fig. 68.



MM. Farcot ont adopté le principe de la surcharge. Ils emploient d'une part un ressort, dont la tension croît à mesure que les boules s'élèvent, et d'autre part un contre-poids à bras de levier variable, calculé de manière à faire compenser les diverses causes d'irrégularité.

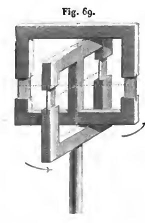
Sans insister sur tous ces détails, nous dirons seulement que,

ce régulateur ayant été expérimenté dans une scierie dans laquelle la puissance de la machine a varié brusquement de 3 à 20 chevaux, on n'a trouvé aucune variation de vitesse, même momentanée.

Application du pendule conique aux horloges. — Le régulateur des horloges est le pendule ordinaire. On emploie peu le pendule conique, qui serait avantageux à certains points de vue, parce qu'il est difficile d'avoir une suspension convenable, les articulations à genou produisant des frottements considérables, et les couteaux ayant, pour une marche un peu prolongée, d'autres inconvénients qui ont été signalés.

M. Redier a eu l'idée d'appliquer au pendule conique la suspension par lames élastiques, qui est la meilleure pour les pendules ordinaires; dans le cas du pendule conique, cette suspension a lieu dans deux plans perpendiculaires, comme dans

Fig. 69.



la double suspension à la Cardan; l'appareil fonctionne alors parfaitement bien, à la condition que les centres de gravité des quatre lames soient dans un même plan horizontal. Ce régulateur jouit d'une propriété curieuse qui peut être très-utile dans certains cas, c'est qu'il permet de mettre une horloge à l'heure à une fraction de seconde près.

En effet, le pendule, par son système de suspension, est isolé complétement de ses supports, et ses révolutions s'effec-

tuent uniformément dans l'espace absolu indépendamment de l'orientation des diverses pièces du mécanisme.

Si donc on tourne le support d'un angle de 1 degré, par exemple, en sens contraire de la rotation du pendule, la roue qui tourne comme celui-ci aura fait un tour entier par rapport à toutes celles qu'elle conduit pendant que le pendule aura seulement parcouru 359 degrés ; et si l'on suppose que le pendule fasse un tour par seconde, l'horloge aura avancé de $\frac{1}{360}$ de seconde, ou d'une fraction quelconque, en tournant convenablement le cabinet. Le mouvement inverse produirait le retard.

J'ai cru qu'il ne serait pas inutile d'insister un peu sur cette question, qui présente une nouvelle application bien simple de la théorie de la rotation des corps et de celle des mouvements relatifs.

Utilité du volant au point de vue des variations accidentelles. — Il résulte de ce qui précède que, si le volant joue un grand rôle dans l'atténuation des variations périodiques du travail moteur et du travail résistant, cet engin ne peut en rien compenser les variations accidentelles. A toute augmentation de travail résistant doit correspondre un ralentissement de la machine, jusqu'à ce que le régulateur ait rétabli l'état normal.

Cependant, comme l'action du régulateur ne peut pas être instantanée, il importe que, en attendant, le ralentissement ne soit pas assez considérable pour compromettre le bon fonctionnement des outils. Ceci rentre dans la spécialité du volant; et, à ce point de vue, tout ce qu'on peut dire, c'est qu'il y aura lieu d'avoir un volant d'autant plus lourd que la machine sera exposée à subir des variations accidentelles plus considérables.

§ XXVI. — De l'outil et de la transmission.

Nous avons peu de choses à dire, au point de vue de la Mécanique générale, de la pièce spéciale connue sous le nom d'*outil*, qui reçoit son mouvement du reste de la machine et se trouve directement en relation avec la matière à élaborer. C'est aux praticiens qu'il appartient de déterminer la forme à donner à l'outil, la nature du mouvement dont il doit être

animé, enfin la vitesse la plus convenable pour la bonne exécution de l'ouvrage à faire. Ces conditions étant une fois bien arrêtées, les mécaniciens devront chercher à les remplir le plus exactement possible en faisant intervenir la considération de l'économie du travail; mais il ne faut pas oublier que cette considération est en définitive secondaire, et doit être subordonnée au degré de perfection qu'on désire atteindre dans l'opération.

Par exemple, nous avons condamné en thèse générale tous les engins dans lesquels l'effet utile est obtenu au moyen d'un choc. Cela veut dire que, toutes les fois qu'on pourra substituer au choc une pression continue, sans nuire à la bonne exécution du travail, on devra le faire. Ainsi, pour l'opération du broyage des minerais métalliques, et pour la fabrication de la poudre, on a substitué en grande partie les meules et les cylindres broyeurs aux pilons. Cependant ces derniers n'ont pas complétement disparu et sont encore préférés dans certains cas spéciaux. De même, pour le cinglage des loupes sortant des fours à puddler, les essais de presses ont entièrement échoué, et l'on a été obligé d'en revenir aux marteaux. Enfin, si nous considérons le battage des pilotis, le forage des trous de sonde dans le rocher, etc., il ne semble guère possible de procéder autrement que par des chocs convenablement gradués.

Moyens d'assurer l'uniformité du mouvement de l'outil. — Nous avons indiqué combien il était généralement important que l'outil s'écartât le moins possible de la vitesse reconnue comme la plus convenable (*). Une fois qu'on a calculé la

(*) Il ne faudrait pourtant pas prendre ce principe d'une manière trop absolue. Il est très-important, d'un autre côté, que la résistance opposée au mouvement de l'outil n'éprouve pas de variations trop brusques, ce qui arriverait certainement dans un grand nombre d'opérations, si l'outil était contraint par une force aveugle à marcher avec une vitesse constante. Dans des cas de ce genre, on emploie souvent un ressort qui cède plus ou moins selon la grandeur de l'effort résistant, et qui peut même, si cet effort devient trop grand, mettre en mouvement un débrayage qui arrête la marche de la machine et prévienne le surveillant. Quand la transmission du moteur à l'outil se fait par le moyen d'une courroie, on voit, dans le même cas d'une résistance insurmontable, la courroie glisser et même tomber de dessus la poulie. Dans un cas analogue, un engrenage se briserait.

transmission et déterminé la vitesse de régime de la machine de manière à donner à l'outil sa vitesse normale, on calcule les dimensions du volant afin de régler les écarts inévitables de part et d'autre de cette vitesse normale. Comme les vitesses de toutes les parties de la machine sont liées par des lois géométriques indépendantes du travail des forces et du mode de répartition des masses en mouvement, il suffit de régler la vitesse d'un seul arbre pour assurer la quasi-uniformité du mouvement de tous les arbres qui sont en relation avec lui.

La théorie de la régularisation détermine seulement une somme de la forme

$$\Sigma \Pi W^2,$$

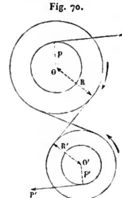
relative aux volants ou aux masses fonctionnant d'une manière analogue. Quant à la répartition de ces masses sur les divers arbres, à la place que doit occuper le volant principal, toutes ces questions se présentent comme absolument indifférentes, si l'on regarde les liaisons comme douées d'une rigidité absolue et les vitesses comme rigoureusement soumises aux rapports géométriques déterminés par les règles de la Cinématique.

Les choses changent complétement de face quand on cherche à se rendre compte de la grandeur des forces intérieures, des tensions des liens et organes de transmission. Quand la résistance varie d'une manière notable, et en même temps que le volant absorbe ou restitue du travail pour accomplir son rôle de pondérateur, les actions mutuelles des pièces en rapport subissent des variations qu'il importe également de resserrer dans des limites bien déterminées. Nous allons montrer que ces variations dépendent essentiellement du rapport des masses des deux pièces.

Actions mutuelles de deux corps tournants dans le mouvement varié. — Considérons deux solides tournant autour d'un axe O et O' (*fig.* 70) et reliés, soit par un engrenage, soit par une courroie, comme nous l'avons supposé dans la figure pour fixer les idées. Indiquons le sens des rotations par des flèches; soient P la puissance, P' la résistance, p et p' les bras des leviers respectifs de ces forces, R et R', I et I' les rayons et les moments d'inertie des deux corps; enfin désignons par T

l'intensité de la pression mutuelle des dents de l'engrenage, abstraction faite de leur frottement, ou la différence des tensions des deux brins de la courroie, abstraction faite de leur roideur.

Fig. 70.



Les inconnues sont au nombre de trois, à savoir : l'action mutuelle T et les accélérations angulaires $\frac{d\omega}{dt}$, $\frac{d\omega'}{dt}$ des deux corps tournants. Nous avons, pour déterminer ces inconnues, les trois équations

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{Pp - TR}{I}, \quad \frac{d\omega'}{dt} = \frac{TR' - P'p'}{I'}, \quad R\frac{d\omega}{dt} = R'\frac{d\omega'}{dt}.$$

Ces équations se simplifient en posant $I = MR^2$, $I' = M'R'^2$, $Pp = FR$, et $P'p' = F'R'$. On voit que M et M' sont les masses qui, distribuées sur les circonférences des rayons R et R', auraient les moments d'inertie I et I', ce que nous avons appelé les masses réduites, et F et F' sont les forces tangentes à ces circonférences qui auraient les mêmes moments et feraient les mêmes travaux que P et P'. On a, d'après cela,

$$R\frac{d\omega}{dt} = \frac{F - T}{M} = R'\frac{d\omega'}{dt} = \frac{T - F'}{M'} = \frac{F - F'}{M + M'},$$

d'où

$$T = \frac{M'F + MF'}{M + M'},$$

formule facile à exprimer en langage ordinaire. Ces équations sont les mêmes que s'il s'agissait de deux corps de masses M et M′, en mouvement rectiligne, soumis aux forces F, F′, et se pressant mutuellement.

Dans le cas particulier où $F = F'$, l'action mutuelle T est égale à chacune de ces forces. Le mouvement est uniforme.

Si l'une des forces F et F′, supposées d'abord égales, comme elles doivent l'être pour l'uniformité, vient à prendre un accroissement plus ou moins considérable $\Delta F'$, il en résulte

$$\Delta T = \Delta F' \frac{1}{1 + \frac{M'}{M}}.$$

On en conclut cette règle pratique importante que, lorsque l'un des deux corps est exposé à subir des efforts qui prennent momentanément des accroissements considérables, on doit faire en sorte que la masse réduite M de ce corps soit aussi grande qu'il est possible par rapport à celle de l'autre corps, afin que l'action mutuelle T reçoive peu de variation.

Cette considération détermine la place du volant qui doit, dans le cas que nous venons d'étudier, être monté sur l'arbre O′, c'est-à-dire sur l'outil.

On pourra ainsi diminuer l'épaisseur qu'il est indispensable de donner aux dents de l'engrenage pour leur permettre de résister aux variations de pression et réduire le travail nuisible du frottement. Si la communication du mouvement a lieu par courroie, le maximum T de la différence de tension des deux brins étant aussi petit que possible, on évite, soit la rupture, soit le glissement de la courroie, et l'on réduit l'effet nuisible du frottement des tourillons et de la roideur de la courroie.

Quand on a deux outils, ou un plus grand nombre, commandés par un même arbre moteur, et que chacun de ces outils est soumis à une résistance variable, la question de la répartition des masses devient beaucoup plus délicate ; car il est à craindre que le volant d'un des arbres ne nuise à l'autre, chose qu'il ne serait pas possible d'éviter si les phénomènes étaient seulement soumis aux lois géométriques dont nous venons d'indiquer quelques conséquences.

L'usage est de placer un volant sur chaque outil exposé à rencontrer une résistance variable, mais il y a lieu de croire que l'utilité de cette addition réside principalement dans l'élasticité des courroies ou des arbres de transmission. Il résulte en effet de cette élasticité que le ralentissement du treuil qui subit un accroissement brusque de résistance met un certain temps à se transmettre aux autres treuils en relation avec lui, et réciproquement. Il est donc convenable de suppléer en partie à l'action d'un volant principal trop éloigné par celle d'un volant spécial qui restitue immédiatement une portion du travail moteur qui manque, en attendant que les autres masses de la machine, ou le régulateur, s'il y a lieu, soient en mesure de fonctionner à leur tour et de rétablir complétement l'équilibre.



SECONDE SECTION.

HYDRAULIQUE.

L'objet de l'*Hydraulique* est l'étude théorique et expérimentale des divers phénomènes que les fluides nous présentent, eu égard à leur équilibre, à leur mouvement et à leurs relations avec les corps solides, fixes ou mobiles.

Au point de vue de l'utilité générale, cette étude est peut-être celle qui présente au plus haut degré le caractère de la plus impérieuse nécessité, et les questions qui sont du domaine de l'Hydraulique sont du nombre de celles pour lesquelles le luxe, la commodité, la sécurité réclament une solution immédiate.

En particulier, on ne saurait absolument se passer du secours de l'eau : il faut la conduire au centre de nos habitations, nous garantir de ses ravages, lui faire mouvoir des machines qui suppléent à notre faiblesse, la faire jaillir au sein de nos villes pour l'agrément et la salubrité, lui confier, pour les transporter d'un bout du monde à l'autre, les denrées les plus indispensables à la vie; il faut contenir de grands fleuves, changer le lit des rivières, creuser des canaux, bâtir des aqueducs, ériger des fontaines, lancer des bateaux sur nos rivières ou de puissants navires sur l'Océan.

L'Hydraulique a fait de grands progrès depuis le milieu du siècle dernier, surtout en ce qui concerne l'utilisation de l'eau et des fluides élastiques comme forces motrices; il lui en reste encore beaucoup à faire dans cette voie et de bien plus importants encore relativement à la découverte des lois qui régissent le cours des eaux à la surface de la terre. Avons-nous bien les données nécessaires pour apprécier la vitesse d'un fleuve dont nous connaissons la largeur, la profondeur et

la pente; déterminer à quelle hauteur il élèvera ses eaux s'il vient à recevoir un autre fleuve dans son lit; prévoir de combien il baissera si on lui fait une saignée; tracer les contours d'une rivière de telle sorte qu'elle ne travaille point à changer le lit dans lequel on l'a renfermée; prévoir l'effet d'un redressement, d'une coupure, d'un réservoir destiné à emmagasiner le produit d'une crue subite; calculer de combien un pont, une retenue, une vanne feront hausser les eaux d'une rivière; marquer jusqu'à quelle distance ce remous sera sensible, et s'assurer que les propriétés riveraines n'en deviendront pas plus exposées à des inondations?

Ces questions, si éminemment intéressantes pour la prospérité publique, n'entrent point dans notre programme; je ne les ai posées qu'afin de nous empêcher d'éprouver un injuste dédain pour les problèmes que nous allons traiter et pour l'inélégance et l'incertitude de nos méthodes plus empiriques que rationnelles. On fait ce que l'on peut; certes, nous serons bien loin de la rigueur, de la précision et de la magnifique généralité des théories exposées dans les Chapitres précédents; mais nous verrons que l'on peut, au moins pour les questions les plus élémentaires, pour celles dont nous avons à nous occuper, arriver, en subordonnant toujours le calcul à l'expérience, à des solutions sinon rigoureuses, du moins satisfaisantes pour les besoins de la pratique.

Le Cours va donc changer complétement de face. Jusqu'ici le calcul jouait le principal rôle; il ne figurera désormais que comme auxiliaire, mais auxiliaire indispensable de l'expérience.

L'Hydraulique, de même que la Mécanique générale, se divise en deux Parties, relatives respectivement à l'équilibre et au mouvement des fluides. Ces deux Parties sont l'*Hydrostatique* et l'*Hydrodynamique*.

CHAPITRE PREMIER.

HYDROSTATIQUE.

§ I. — Propriétés caractéristiques des fluides.

Quoique nous ignorions la constitution intérieure des fluides, il est évident que les lois générales de l'équilibre leur conviennent comme aux corps solides. L'Hydrostatique n'est donc qu'un cas particulier de la Statique générale.

Cependant les premières théories relatives à l'équilibre et à la pression des fluides, depuis Archimède jusqu'à Galilée, et même au delà, ont été établies d'une manière absolument indépendante des principes généraux de la Statique, et n'ont été fondées que sur des principes d'expérience particuliers aux fluides; cette manière de démontrer les lois de l'Hydrostatique, en déduisant de la connaissance expérimentale de quelques-unes de ces lois celle de toutes les autres, a été adoptée par un grand nombre d'auteurs, et a fait de l'Hydrostatique une science tout à fait différente et indépendante de la Statique, une science qu'on est habitué à regarder plutôt comme une branche de la Physique.

Caractères généraux des fluides. — Les fluides (liquides ou gaz) sont des corps dont les molécules sont extrêmement mobiles les unes par rapport aux autres. Lorsqu'on cherche à faire glisser les différentes parties d'une masse fluide les unes sur les autres, on n'éprouve pas de résistance analogue au frottement qui se développe dans le glissement des corps solides. L'absence absolue du frottement entre les diverses parties d'un fluide qui se déplacent les unes par rapport aux autres définit pour nous la *fluidité parfaite*. Les liquides et

les gaz, tels qu'ils existent dans la nature, sont en général extrêmement près de présenter cette fluidité parfaite, surtout lorsqu'ils sont en équilibre absolu ou relatif. Nous supposerons dans ce Chapitre qu'ils jouissent complétement de cette propriété. La vérification expérimentale des résultats auxquels nous parviendrons ainsi montre que, en faisant cette hypothèse, nous ne nous écartons pas sensiblement de la réalité.

Lorsqu'un liquide est contenu dans un vase, et qu'on cherche à diminuer le volume qu'il occupe en le comprimant dans ce vase, on trouve que le liquide conserve le volume qu'il avait d'abord, ou du moins la diminution de volume qu'il éprouve est si faible qu'on a beaucoup de peine à s'en apercevoir; c'est ce qui fait qu'on donne aux liquides le nom de *fluides incompressibles*. Dans ce qui suit, nous traiterons les liquides comme jouissant d'une incompressibilité absolue; nous nous écarterons ainsi tellement peu de la réalité que cela n'occasionnera aucune erreur appréciable dans les résultats auxquels nous parviendrons.

Un gaz se comporte tout autrement qu'un liquide quand on cherche à le comprimer; on peut, sans grande difficulté, réduire son volume à n'être plus que la moitié, le tiers, le quart de ce qu'il était d'abord. Si ensuite on cesse d'exercer l'effort qui a déterminé cette diminution de volume, le gaz revient de lui-même et exactement à son volume primitif. C'est pour cela qu'on donne aux gaz le nom de *fluides élastiques*, comme nous offrant le seul type de l'élasticité parfaite.

La propriété qui définit la fluidité parfaite, c'est-à-dire l'absence de tout frottement, peut être facilement traduite analytiquement; et rien n'est plus facile, ce point une fois établi, que d'appliquer à l'équilibre des fluides notre principe général des *vitesses virtuelles*. Aussi Galilée, auteur de ce principe, s'en est-il servi pour démontrer les principaux théorèmes de l'Hydrostatique (*), aussi bien que ceux de la Statique proprement dite. Descartes et Pascal ont également employé le principe des vitesses virtuelles dans l'Hydrostatique,

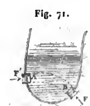
(*) *Discorso intorno alle cose che stanno sull' acqua, o che in quella si muovono.*



et nous allons, à l'exemple de ce dernier (*Traité de l'équilibre des liqueurs*), montrer très-simplement, en partant de ce principe, comment une pression quelconque, appliquée à un point de la surface d'un fluide en équilibre, se transmet également en tous les autres points.

De la pression dans un fluide en équilibre. — Considérons une masse fluide en équilibre dans un vase de forme quelconque (*fig.* 71), et supposons que ses molécules ne soient

Fig. 71.



soumises à aucune force autre que les actions que chacune d'elles éprouve de la part des molécules voisines. Ce fluide exercera généralement des pressions sur les diverses parties de l'enveloppe qui le renferme. Si l'on vient à enlever une petite portion plane de cette enveloppe, et si on la remplace par un piston B de même forme, mobile dans un bout de tuyau adapté au contour de l'ouverture ainsi produite, on conçoit que le fluide pourra se trouver exactement dans les mêmes conditions que précédemment, pourvu qu'on applique au piston B une force convenable F dirigée parallèlement aux parois du tuyau dans lequel il peut se mouvoir. Cette force F est égale et directement opposée à la *pression* du liquide sur la portion B de paroi que nous considérons.

Pour parler plus exactement, la force F est égale et opposée à la résultante des pressions élémentaires qui s'exercent sur chaque portion infiniment petite de la paroi B, pressions qui sont toutes normales à cette paroi supposée plane, et qui admettent par conséquent une résultante unique égale à leur somme.

Cette résultante constitue la pression totale supportée par l'aire B; sa direction normale est une conséquence de l'hypothèse fondamentale de l'absence du frottement des liquides,

soit sur eux-mêmes, soit sur les corps solides avec lesquels ils se trouvent en contact.

Si, en subdivisant la surface pressée en parties de plus en plus petites, on trouve que la pression totale sur chaque partie décroît dans le même rapport, la première est dite *uniforme* ou *uniformément répartie;* et, si l'on divise une pression totale uniforme rapportée à l'unité de force (le kilogramme) par l'aire de la paroi qui la supporte, exprimée par son rapport à l'unité de surface (le mètre carré), on a, pour la surface dont il s'agit, ce qui s'appelle la *pression par unité de surface* (pression en kilogrammes par mètre carré).

Si les pressions sur les subdivisions de la surface pressée ne sont pas proportionnelles aux aires, le quotient de la pression totale par l'aire totale donne la *pression moyenne* par unité de surface, et la limite dont on approche en appliquant ce calcul à une aire de plus en plus petite, dans laquelle se trouve toujours un point déterminé, est *en ce point* la pression *par unité de surface.*

Théorème de la transmission des pressions. — Considérons toujours notre piston A, qui tient lieu d'une portion de l'enveloppe (*fig.* 71), et plaçons dans une autre région quelconque de cette enveloppe un piston semblable B, également mobile dans un bout de tuyau; représentons par F′ la force qui fait équilibre à la pression totale du liquide sur la paroi B; nous allons faire voir que, si les bases des deux pistons A et B sont égales, les deux forces F, F′ doivent aussi être égales.

Pour démontrer cette proposition, imaginons que nous réunissions les deux bouts du tuyau dans lesquels peuvent se mouvoir les deux pistons A, B, par un canal courbe contenu tout entier à l'intérieur de l'espace occupé par le fluide, et se raccordant à ses deux extrémités avec ces bouts de tuyau; nous pourrons même supposer que la section transversale de ce canal AB soit partout égale à la base de l'un des pistons A, B. Le fluide dont il s'agit étant en équilibre, nous pouvons lui appliquer le théorème du travail virtuel. Pour cela, concevons que le piston A marche d'une quantité infiniment petite ε vers l'intérieur de l'enveloppe; que la portion du fluide qui est située en dedans du canal AB glisse le long de ce canal sans en sortir, et suive ainsi le mouvement du piston A, tout en

conservant le même volume; qu'en conséquence le piston B marche vers l'extérieur, d'une quantité égale à ε; enfin que toute la portion du fluide qui se trouve en dehors du canal AB ne se déplace pas. Pour ce déplacement virtuel du système matériel que nous considérons, la somme des travaux virtuels des forces qui sont appliquées à ses diverses parties doit être nulle. Or la portion AB du fluide qui se déplace seule ne change pas de volume; les diverses parties qui la composent se meuvent séparément en glissant simplement les unes sur les autres, ou bien sur la partie du fluide qui est en dehors du canal AB et qui reste immobile; mais ce glissement s'effectue sans qu'il y ait de frottement, en raison de la fluidité parfaite du système : il résulte de là, et de ce que nous avons dit à l'occasion des systèmes matériels dans lesquels on imagine des liaisons, que la somme des travaux virtuels dus aux actions que les molécules du fluide tout entier exercent les unes sur les autres est égale à zéro. D'après cela, on voit que la somme des travaux virtuels des forces appliquées à notre système matériel se réduit à

$$F\varepsilon - F'\varepsilon;$$

et comme cette somme doit être nulle, il s'ensuit qu'on a

$$F = F'.$$

On conclut de la proposition qui vient d'être établie que la force F, appliquée au piston A, donne lieu à une pression égale à F sur toute portion de l'enveloppe ayant une étendue égale à la base de ce piston, et, par suite, à une pression égale à nF sur toute surface égale à n fois cette même base (*). C'est ce qui constitue le ***théorème de la transmission des pressions*** dans un fluide dont les molécules ne sont soumises à aucune force autre que les actions que chacune d'elles éprouve de la part des molécules voisines. Il est bon d'observer que la force F, appliquée au piston A, peut recevoir une grandeur quelconque si le fluide que l'on considère est incom-

---

(*) Tel est le principe de la *presse hydraulique*, inventée par Pascal, appareil qui rend à l'industrie des services considérables.

pressible, mais qu'elle doit au contraire avoir une valeur déterminée s'il s'agit d'un fluide élastique, sans quoi le gaz se comprimerait ou se dilaterait. On sait que, pour une masse gazeuse en équilibre de température, la pression est une fonction déterminée du volume.

Pression en un point intérieur de la masse fluide. — Principe de l'égalité de pression en tous sens. — Les définitions et les propositions précédentes s'appliquent aux actions intérieures des molécules liquides les unes sur les autres, aussi bien qu'à celles qui s'exercent sur les parois.

Soit M un point quelconque pris à l'intérieur d'une masse fluide (*fig.* 72). Concevons par ce point une surface EE' qui

Fig. 72.

s'étende de tous côtés jusqu'à l'enveloppe, et qui soit plane dans un certain rayon, tout autour du point M. Nous aurons ainsi divisé la masse fluide en deux portions L, A, et le point M se trouvera actuellement sur la paroi artificielle que nous venons d'imaginer.

Cela posé, rien n'empêche de supposer que la partie A soit solidifiée sans changer de forme; nous ne détruirons certainement pas ainsi l'équilibre, et le point M sera maintenant situé sur une paroi réelle à laquelle on peut appliquer le théorème précédent. Le fluide L exerce donc une pression égale à F sur une portion plane de la surface EE' dont l'étendue serait égale à A.

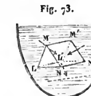
Ce résultat est indépendant de la direction que nous avons donnée à cette partie plane; la pression par unité de surface qui s'exerce entre les diverses molécules liquides dans le voisinage du point M est donc la même dans toutes les directions autour de ce point M.

Tel est le principe ou théorème de Pascal, relatif à l'égalité

de pression dans tous les sens autour d'un point quelconque M d'un fluide en équilibre. Ce théorème, que nous venons d'établir dans le cas d'un fluide dont les diverses molécules ne sont soumises qu'à leurs actions mutuelles, s'étend sans difficulté au cas où chaque molécule du fluide en équilibre serait soumise à une force extérieure, variable d'une molécule à l'autre, suivant une loi quelconque, mais continue.

Pour le démontrer, faisons passer par le point M deux plans quelconques MM'N, MM'L (*fig.* 73), et menons dans ces

Fig. 73.



plans, perpendiculairement à leur intersection, les quatre droites MN, M'N', ML, M'L', égales entre elles et à la longueur MM' prise sur l'intersection. Le fluide contenu dans le prisme droit triangulaire ainsi déterminé est en équilibre sous les forces extérieures qui sont : 1° les pressions totales *normales* exercées sur les cinq faces; 2° les forces, analogues à celles de la pesanteur, qui sollicitent toutes les molécules de la portion du fluide considérée. Mais, à mesure qu'on diminue dans un même rapport les dimensions MN, MM', ces dernières forces deviennent aussi petites qu'on veut relativement aux pressions sur les faces, parce que les unes finissent par être proportionnelles au volume du prisme ou au cube de MM', tandis que les autres deviennent proportionnelles au carré de cette longueur. Donc, à la limite, les premières doivent être négligées relativement aux autres, et l'équilibre finit par exister entre les seules pressions. Or, si l'on projette ces forces sur un axe parallèle à NL, il ne reste que les pressions sur les faces MN', ML', qui, faisant des angles égaux avec NL, doivent être égales pour que leurs projections le soient; et, ces forces étant égales, il en résulte que les pressions rapportées à une même unité de surface, suivant les deux directions perpendiculaires aux plans quelconques MN, ML, sont égales.

Lorsqu'il s'agit d'un fluide aériforme, la pression est souvent appelée *force élastique*; on lui donne aussi le nom de *tension*.

Les unités dont nous nous servirons seront constamment le mètre et le kilogramme, de sorte que les pressions s'exprimeront toujours numériquement en kilogrammes par mètre carré, ou, si l'on veut, en millimètres d'une colonne d'eau; car il est facile de voir que 1 millimètre d'eau sur une surface de 1 mètre carré correspond précisément au poids de 1 kilogramme. Il arrive souvent que, pour éviter de grands nombres, on emploie pour unité la pression de l'atmosphère. Une atmosphère représentant, suivant les conventions adoptées, le poids d'une colonne de mercure de 1 mètre de section et de 760 millimètres de hauteur, ce mot équivaudra pour nous à 10 333 kilogrammes par mètre carré.

Densité d'un fluide en un point. — Si un fluide est homogène, c'est-à-dire que sous deux volumes égaux quelconques il ait partout des masses égales, sa *densité*, suivant l'acception de ce mot en Mécanique, est sa masse sous l'unité de volume. Si le fluide n'est pas homogène, la *densité moyenne* d'une portion définie de ce corps est le quotient obtenu en divisant la masse de cette portion par son volume. Sa *densité en un point* est la limite dont on approche indéfiniment en prenant la densité moyenne d'une portion du fluide sans cesse décroissante, et comprenant le point dont il s'agit. Si le fluide est rapporté à trois axes coordonnés, sa densité en un point est en général une fonction des coordonnées x, y et z de ce point : on la représente par ρ. S'il s'agit d'un fluide pesant, l'accélération due à la pesanteur étant g, le produit ρg est le poids, rapporté à l'unité de volume du fluide au même point (x, y, z): nous le désignons par Π, l'unité de volume étant le mètre cube. Ainsi $\rho = \frac{\Pi}{g}$, et Π est, comme ρ, une fonction de x, y, z.

Équilibre d'un fluide pesant. — Le théorème de l'égalité des pressions en tous sens autour d'un point s'applique aux fluides pesants comme aux fluides soumis à des forces quelconques; seulement il n'est plus exact de dire que la pression est la même, à égalité de surface, sur des parois diverse-

ment situées. En effet, dans notre équation

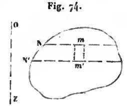
$$F\varepsilon - F'\varepsilon = 0,$$

fournie par le principe des vitesses virtuelles, il faut ajouter un terme qui représente le travail virtuel de la pesanteur, correspondant au déplacement virtuel que nous avons imaginé.

Ce travail serait nul si les deux parois A et B sont situées dans un même plan horizontal : donc l'équation précédente ne serait pas altérée, ce qui démontre que la pression est uniforme dans toute l'étendue d'un même plan horizontal. Ce résultat s'applique aussi bien à l'intérieur de la masse liquide qu'aux points de contact du fluide avec l'enveloppe solide.

Considérons, au contraire, deux points m et m' situés dans deux plans horizontaux infiniment voisins, et que rien n'empêche de supposer placés sur une même verticale. Soient p

Fig. 74.



et $p' = p + dp$ les pressions aux points m et m', ω la base d'un prisme vertical dont l'arête soit m, m', dz la distance des deux plans horizontaux, on a, pour l'équilibre du prisme mm',

$$p'\omega = p\omega + \Pi\omega dz.$$

La différence $p' - p$ devant être constante en quelque point des plans horizontaux N, N' qu'on se place, on voit que la densité Π est constante, ainsi que la pression p, dans toute l'étendue d'un même plan horizontal.

Surfaces de niveau dans les fluides pesants. — Ces divers plans horizontaux s'appellent *surfaces de niveau.* L'intégration de l'équation précédente, qui peut s'écrire

$$dp = \Pi dz,$$

donnera la loi de variation des pressions dans les différentes

couches de niveau, quand on connaîtra la loi de variation des densités. Soit p_0 la pression en un point déterminé, par exemple à la surface libre du liquide, s'il y en a une, on a

$$p = p_0 + \int_{z_0}^{z} \Pi \, dz.$$

Lorsqu'il s'agit d'un liquide homogène en repos, Π est constant, et l'on a l'équation

$$p = p_0 + \Pi h$$

dans laquelle h est la *différence de niveau* des deux points où les pressions sont p_0 et p, pourvu qu'on puisse passer du premier au second, par des détours quelconques, sans sortir du liquide. De là la théorie connue des vases communiquants.

Hauteur représentative d'une pression. — Si dans la dernière formule on suppose $p_0 = 0$, c'est-à-dire que la hauteur h soit comptée à partir d'un plan où la pression soit nulle, on a

$$p = \Pi h \quad \text{ou} \quad h = \frac{p}{\Pi},$$

et, par cette raison, le quotient $\frac{p}{\Pi}$ s'appelle la *hauteur représentant la pression* p; c'est la hauteur d'une colonne verticale pesant Π par unité de volume, et exerçant sur sa base inférieure la pression p par unité de surface, la pression sur la base supérieure étant nulle.

Stabilité des divers liquides pesants superposés. — En vertu de l'homogénéité des couches du niveau, la surface de séparation de deux liquides voisins en équilibre est un plan horizontal. Il faut, de plus, pour la stabilité de cet équilibre, que le liquide inférieur soit plus dense que le supérieur : cette condition est nécessaire pour que, si la situation horizontale de la surface de séparation est tant soit peu dérangée par une cause quelconque, l'état primitif tende à se rétablir dès que cette cause cessera. Cela tient à cette propriété générale des systèmes matériels sous l'action de la pesanteur et des réactions de corps fixes : mis sans vitesse dans une situation qui n'est pas celle de l'équilibre, ils se mettent en mouve-

ment, puisque la condition de l'équilibre n'est pas satisfaite; ils ne peuvent le faire sans acquérir une certaine force vive, ce qui exige que la pesanteur fasse un travail positif, et que par conséquent le centre de gravité descende.

Équilibre des fluides sollicités par des forces quelconques. — Une portion définie d'un fluide est en général sollicitée par des forces analogues à celles qui constituent son poids, forces qui agissent indépendamment et en outre des pressions dues aux molécules environnantes. Leur résultante, divisée par la masse de cette portion, est l'accélération que celle-ci, ou plutôt son centre de gravité, prendrait sous la seule action des forces dont nous parlons. A mesure que la portion définie diminue d'étendue, en y comprenant toujours un point (x, y, z), l'accélération due à ces forces approche d'une limite j; et puisque ρ est à la limite la masse d'unité du volume, le produit ρj est la force rapportée à l'unité de volume au point (x, y, z) du fluide. L'accélération j, variable en intensité et en direction, est donnée par ses trois composantes parallèles aux axes; nous les désignerons par X, Y, Z. La force ρj se décompose donc en ρX, ρY, ρZ, et les composantes de la force qui s'exerce sur une masse infiniment petite, dm, seront représentées par $X dm$, $Y dm$, $Z dm$.

Exemples : 1° Dans le cas où les forces indépendantes des pressions sont uniquement dues à la pesanteur, si l'axe des Z est vertical et ascendant, on a

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = -g.$$

2° S'il s'agit d'un fluide en repos dans un vase tournant autour d'un axe fixe vertical avec une vitesse angulaire constante ω, la force ρj qu'il faut attribuer à l'unité de volume de ce fluide pour traiter son repos apparent comme un repos réel est la résultante de la force ρg verticale due à la pesanteur, et la force $\rho \omega^2 r$ centrifuge; ainsi

$$X = \omega^2 x, \quad Y = \omega^2 y, \quad Z = -g.$$

Équations générales de l'équilibre des fluides. — Considérons dans un fluide en repos un parallélépipède rectangle infiniment petit, dont un sommet est le point (x, y, z), les côtés

parallèles aux axes étant respectivement dx, dy, dz. Sa masse dm est, sauf un infiniment petit d'ordre supérieur au troisième, $\rho\,dx\,dy\,dz$. La force qui la sollicite, indépendamment des pressions exercées par le fluide environnant, a, sauf la même restriction, ses trois composantes égales à $X dm$, $Y dm$, $Z dm$. La pression du fluide au point (x, y, z) par unité de surface dans une direction quelconque étant représentée par p, la pression totale du fluide extérieur au parallélépipède, sur la face dont la distance à l'origine est x, a pour valeur $p\,dy\,dz$, sauf un infiniment petit du troisième ordre, et elle est dirigée dans le sens des x positifs. La pression, par unité de surface au sommet, dont les coordonnées sont $x+dx$, y et z, est $p+\frac{dp}{dx}dx$, expression dans laquelle $\frac{dp}{dx}$ est la différentielle partielle de p par rapport à x. La pression totale sur la face du parallélépipède dont la distance à l'origine est $x+dx$ a donc pour valeur $\left(p+\frac{dp}{dx}dx\right)dy\,dz$, et elle est dirigée dans le sens des x négatifs. Les autres faces subissant des pressions qui leur sont perpendiculaires, il en résulte que l'équilibre du parallélépipède exige qu'on ait

$$p\,dy\,dz-\left(p+\frac{dp}{dx}dx\right)dy\,dz+X\,dm=0.$$

En mettant pour dm sa valeur, réduisant et raisonnant de même pour les forces parallèles aux y et z, on obtient les trois équations nécessaires et suffisantes de l'équilibre du fluide :

$$(1)\qquad \frac{dp}{dx}=\rho X,\quad \frac{dp}{dy}=\rho Y,\quad \frac{dp}{dz}=\rho Z.$$

En les multipliant respectivement par dx, dy et dz, et en les ajoutant, on a

$$(2)\qquad dp=\rho\,(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz).$$

Si le fluide est en équilibre, le second membre de cette équation est la différentielle totale d'une fonction de x, y et z, et cette fonction, une fois obtenue, fera connaître la pression, à une constante près qu'on pourra déterminer

si l'on connaît la pression par unité de surface en un point donné.

Dans le cas de la simple pesanteur, on retrouve, en faisant $X = 0$, $Y = 0$ et $Z = g$, l'équation

$$dp = \rho g\, dz,$$

équivalente à

$$dp = \Pi\, dz.$$

Ce moyen simple de trouver les équations générales de l'Hydrostatique est dû à Euler (*), qui l'a tiré des principes posés pour la première fois par Clairaut (**).

Surfaces de niveau. — On appelle ***surface de niveau***, relativement à la force variable dont les composantes sont X, Y, Z, une surface qui, menée par un point pris arbitrairement, a en chacun de ses points pour normale la direction de la résultante j de X, Y, Z; cette définition est une extension de la signification ordinaire de la même expression, relativement à la pesanteur. Par un point (x, y, z) imaginons, sur la surface de niveau qui lui correspond, une courbe quelconque; et soit ds, dont les projections sur les axes sont les différentielles dx, dy, dz, l'élément différentiel de cette courbe, à partir du point dont il s'agit. Les angles de la tangente à la courbe avec les axes ont pour cosinus $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$; les cosinus des angles de la résultante j avec les mêmes axes sont $\frac{X}{j}$, $\frac{Y}{j}$ et $\frac{Z}{j}$. La définition précédente est donc exprimée par l'équation

$$\frac{1}{j\, ds}(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = 0;$$

et l'équation différentielle d'une surface de niveau quelconque, pour le système de forces supposé, est

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0.$$

Cette équation est intégrable si la condition d'équilibre est

(*) *Mémoires de l'Académie de Berlin* pour 1755.

(**) *Théorie de la figure de la Terre.*

satisfaite; en effet, on rend son premier membre une différentielle exacte en le multipliant par le facteur ρ.

Cas particulier où $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ *est la différentielle exacte d'une fonction des variables* x, y et z. — Puisque X, Y et Z sont les composantes d'une force j supposée appliquée à l'unité de masse, $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ est le travail élémentaire que cette force produirait sur un point ayant l'unité de masse et se transportant du lieu où les coordonnées sont x, y, z à celui où elles deviennent $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$. Or on sait que ce travail est la différentielle exacte d'une fonction φ des coordonnées du point (x, y, z), en particulier lorsque j est la résultante des forces qui passent par des points fixes (centres d'attraction et de répulsion), et dont les intensités sont fonctions des distances r de leurs points d'application à ces centres respectifs.

Dans ce cas, l'équation (2) peut s'écrire ainsi :

$$dp = \rho\,d\varphi.$$

On conclut de là que, sur les surfaces dont l'équation est $\varphi =$ const., on aura $dp = 0$, et par suite $p =$ const. La densité sera aussi constante sur ces surfaces, parce que, $\rho\,d\varphi$ étant une différentielle exacte, ρ doit être une simple fonction de φ, et par suite constante en même temps que φ.

§ II. — Pression totale d'un liquide pesant homogène sur un plan. Centre de pression.

Soit ω l'aire de l'un des éléments d'une portion de plan en contact avec un liquide en repos; soit h sa hauteur au-dessous d'un plan horizontal NN dans lequel la pression est p_0; la pression sur l'élément ω est $\omega p_0 + \omega \Pi h$; les pressions sur tous les éléments du plan étant perpendiculaires à ce plan ont une résultante égale à leur somme $p_0 \Sigma\omega + \Pi \Sigma\omega h$. Or, si Ω désigne l'aire totale $\Sigma\omega$, et si H est la hauteur du centre de gravité du plan pressé au-dessous du plan de niveau, on a $\Sigma\omega h = \Omega H$, et la pression totale est $\Omega(p_0 + \Pi H)$. On remarque que $\Pi\Omega H$ est le poids d'un prisme de liquide qui aurait pour base Ω et pour hauteur H. Donc la pression ne dé-

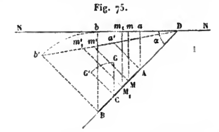
pend pas de l'orientation de la face : elle ne dépend que de la hauteur du centre de gravité au-dessous de la surface libre.

Centre de pression. — La résultante des forces normales au plan pressé perce ce plan en un point appelé ***centre de pression***, qui est toujours situé au-dessous du centre de gravité de la surface. En effet, si, par la pensée, on rend cette paroi horizontale en la faisant tourner autour d'un axe horizontal tracé dans son plan par le centre de gravité, la pression totale n'est pas changée, puisqu'elle est toujours $\Omega(p_0 + \Pi H)$, et la résultante passe alors par le centre de gravité, puisque, dans ce cas, les pressions sur des éléments égaux du plan sont égales. Or, si l'on ramène la paroi à sa position inclinée, les pressions partielles sur la partie supérieure de la paroi sont diminuées, les autres sont augmentées ; donc la résultante passe au-dessous de l'axe de rotation.

La position du centre de pression d'un liquide sur une paroi plane se trouve par le calcul, en appliquant la théorie de la composition des forces parallèles. Nous nous bornerons au cas où le liquide est homogène. Nous négligerons, comme l'on fait ordinairement, le terme dû à la pression atmosphérique, parce que celle-ci est supposée agir également sur la face opposée égale et parallèle à celle de la paroi considérée.

Dans la *fig.* 75, dont le plan est supposé vertical et perpen-

Fig. 75.



diculaire à la paroi pressée, représentons par NN le plan horizontal dans lequel la pression du liquide est considérée comme nulle. Soit AB la trace verticale de la paroi, et soit D l'intersection de son plan prolongé avec NN. Soit C le centre de pression, et supposons qu'on demande sa distance AC à l'axe horizontal A. Décomposons la surface AB en éléments $d\omega$

19.

tels que celui qui se projette en MM_1. Appelons z la distance verticale Mm, x la distance AM. La pression sur la surface $d\omega$ est $\Pi z\,d\omega$; son moment autour de l'axe A est $\Pi zx\,d\omega$. Si donc nous représentons par x' la distance AC, nous aurons

$$(1)\qquad x'\Sigma\Pi z\,d\omega = \Sigma\Pi zx\,d\omega,\quad \text{d'où}\quad x' = \frac{\Sigma zx\,d\omega}{\Sigma z\,d\omega}.$$

Si l'on choisissait le point D pour origine des x, on aurait

$$z = x\sin\alpha \quad \text{et, par suite,}\quad x' = \frac{\Sigma x^2\,d\omega}{\Sigma x\,d\omega}.$$

Or $\Sigma x^2 d\omega$ est le moment d'inertie de la surface $\Sigma d\omega$ autour de l'axe D, et $\Sigma x\,d\omega$ le moment de la même surface par rapport au même axe; donc le centre de pression coïncide avec le centre de percussion ou le centre d'oscillation de la surface pressée relativement à l'axe D.

L'origine des x étant un point quelconque A, représentons la distance AD par C; ainsi $z = (c + x)\sin\alpha$. Décomposons la surface pressée en bandes horizontales infiniment étroites exprimées par $y\,dx$, la longueur variable des bandes dans le sens horizontal étant y, la formule (1) devient

$$x' = \frac{\int(cx + x^2)\,y\,dx}{\int(c + x)\,y\,dx}.$$

Il ne reste plus qu'à substituer à y son expression en fonction de x et à exécuter les intégrations dans les limites de la surface pressée.

Si cette surface est un trapèze dont les bases soient horizontales, ce qui comprend à peu près toutes les formes de vannes usitées dans la pratique, représentons ces bases projetées en A et B par a et b, et soit la hauteur AB. Nous avons

$$y = a + \frac{b - a}{l}\,x,$$

et en effectuant les intégrations depuis $x = 0$ jusqu'à $x = l$,

$$x' = \frac{l^2(a + 3b) + 2lc(a + 2b)}{2l(a + 2b) + 6c(a + b)}.$$

Cas particuliers :

$c = 0$, trapèze, base à fleur d'eau... $x' = \frac{l(a + 3b)}{2(a + 2b)}$,

$b = 0$, $c = 0$, triangle, base à fleur d'eau... $x' = \frac{1}{2} l$,

$a = 0$, $c = 0$, triangle, sommet à fleur d'eau. $x' = \frac{3}{4} l$,

$a = 0$, $c = 0$, parallélogramme, côté horizontal à fleur d'eau........ $x' = \frac{2}{3} l$.

On trouve aisément *a priori* ces résultats.

La recherche du centre de pression d'un liquide sur une paroi plane peut se ramener à celle du centre de gravité d'un volume. La pression sur la bande MM_1 est égale en intensité au poids d'une tranche de liquide projetée en $MM_1m'_1m'$ qui aurait pour base le rectangle égal à yz projeté en Mm, et pour épaisseur MM_1. En étendant à toute la paroi AB cette observation, on voit :

1° Que la pression totale est égale au poids du prisme ou cylindre droit tronqué $ABa'b'$ qui aurait pour base inférieure la paroi AB et sa base oblique supérieure dans le plan $a'b'$ passant par D, et tel que toute perpendiculaire Mm' est égale à la verticale correspondante Mm;

2° Que la résultante des projections passe par le centre de gravité G′ du même cylindre, et par conséquent le centre de pression C est la projection rectangulaire sur la paroi de ce même centre de gravité;

3° Que le centre de pression est aussi sur la verticale passant par le centre de gravité du prisme ou cylindre tronqué à arêtes verticales $AabB$ ayant pour l'une de ses bases la paroi AB, et sa base supérieure dans le plan horizontal NN. Cette considération conduit immédiatement aux trois dernières valeurs des x' ci-dessus.

Lorsque les deux faces d'une vanne sont pressées par deux portions distinctes d'un même liquide, dont les surfaces en contact avec l'atmosphère sont à des niveaux différents (*fig.* 76) la différence des pressions par mètre carré sur les deux faces

immergées est visiblement constante et égale au poids Π du mètre cube de liquide multiplié par la différence h de niveau,

Fig. 76.



abstraction faite de la légère variation de la pression atmosphérique sur les deux surfaces du liquide.

§ III. — Pression d'un fluide sur une surface courbe.

Quand on considère l'action d'un fluide sur une surface courbe, il ne peut plus être question de *pression totale*. Les pressions élémentaires ne sont plus parallèles, et, généralement, elles n'admettent pas de résultante unique. On peut avoir à chercher la somme des composantes de ces pressions élémentaires sur un axe quelconque; la solution de cette question est fournie par le théorème suivant, qui est évident:

Théorème. — *La composante suivant un axe* Ox *de la pression* $p\omega$, *qui s'exerce normalement à un élément superficiel* ω, *est représentée par la pression que supporterait au même point la projection* ω' *de l'élément* ω *sur un plan perpendiculaire à* Ox.

En effet, si N est la normale à l'élément ω, la composante cherchée est

$$p\omega \cos \overline{N, x} = p\omega',$$

puisque $\omega \cos \overline{N, x}$ est précisément égal à la projection ω' de l'aire sur le plan perpendiculaire à Ox.

Corollaire I. — Si le fluide qui s'appuie sur une surface courbe est à une pression constante (ce qu'on peut souvent admettre approximativement pour un gaz de peu d'étendue), la somme algébrique des projections sur un axe Ox.

des pressions élémentaires supportées par cette surface est égale à la pression que supporterait, en contact avec le même fluide, une surface égale à la projection de la surface courbe sur un plan yOz perpendiculaire à Ox. Il doit être entendu que, lorsque les parallèles à l'axe Ox rencontrent deux fois la surface pressée, les projections des pressions, comme les projections des éléments superficiels où cette rencontre a lieu, se détruisent. Exemples : calotte sphérique, portion de surface cylindrique à base circulaire qui, développée, deviendrait un rectangle, chaudières à vapeur.

Corollaire II. — Lorsqu'on a égard à l'action de la pesanteur sur le fluide liquide ou gazeux qui presse une surface courbe, la propriété indiquée au Corollaire I a encore lieu, pourvu que l'axe Ox soit horizontal.

Corollaire III. — Dans la même hypothèse du fluide pesant, la pression normale sur un élément superficiel quelconque a pour projection verticale une force égale au poids du cylindre fluide vertical tronqué ayant pour base inférieure l'élément superficiel, et ayant sa base supérieure au niveau où la pression est nulle, ce cylindre étant d'ailleurs composé de couches homogènes avec celles qui composent le fluide pesant.

On explique ainsi pourquoi la pression d'un liquide sur le fond d'un vase non cylindrique est tantôt plus grande, tantôt plus petite que le poids du liquide contenu dans le vase. Dans tous les cas, la résultante des pressions exercées par ce liquide sur toute la paroi intérieure du vase, abstraction faite de la pression atmosphérique, est égale au poids du liquide entier, ce qui est d'ailleurs une conséquence nécessaire de l'équilibre de ce dernier, sous l'action de la pesanteur et des réactions du vase.

Cas où les pressions admettent une résultante unique. Poussée d'un fluide. — Lorsqu'un corps est plongé en totalité ou en partie dans un fluide pesant en repos, qui entoure complétement la partie immergée, les pressions que ce fluide exerce normalement à la surface du corps ont une résultante unique passant par le centre de gravité du fluide déplacé, et égale, mais directement opposée au poids de ce même fluide. Çela résulte des corollaires II et III, mais se reconnaît *a priori*

en remarquant que rien ne serait changé aux pressions, si le corps plongé était remplacé par le fluide qu'il déplace, et alors la proposition serait une conséquence des règles de la Statique. Il est bien entendu que le fluide environnant est en contact avec toute la surface qui limite le corps considéré au-dessous du plan de niveau où cesse le fluide. Celui-ci peut d'ailleurs être composé de couches horizontales de diverses densités; mais alors il faut prolonger par la pensée ces couches dans la partie immergée du corps solide, pour avoir le poids du fluide déplacé et son centre de gravité. La résultante des pressions du fluide sur le corps qui y est immergé s'appelle improprement la *perte de poids du corps due à son immersion*. Le centre de gravité du fluide déplacé est convenablement désigné sous le nom de *centre des pressions* que le corps immergé supporte.

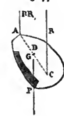
Équilibre d'un corps solide entièrement plongé. — Si ce corps est sous les seules actions de la pesanteur et du fluide environnant, il faut pour l'équilibre :

1° Que son poids soit égal à celui du fluide qu'il déplace;

2° Que le centre de gravité du solide et celui du fluide déplacé (celui du volume du corps, si le fluide est homogène) soient sur une même verticale.

Quant à la seconde condition, il y a une distinction importante à faire. Puisque le corps est solide, on peut, sans rien changer à son état de repos ou de mouvement, remplacer les forces auxquelles il est soumis par leurs résultantes, savoir : la force P représentant son poids (*fig.* 77), appliquée au centre

Fig. 77.



de gravité G du solide, et la pression résultante ou poussée R verticale ascendante égale à P, mais appliquée au centre de

pression C. La résultante de translation de ces forces étant nulle, de quelque manière qu'on place le corps dans le liquide, sans vitesse initiale, le centre de gravité reste immobile; mais, en vertu de la force R, le corps tourne autour de G vers la position où C est verticalement au-dessus de G. De là, la distinction de deux équilibres, l'un stable, l'autre instable, suivant que G est au-dessus ou au-dessous de C.

Si le solide, au lieu d'être libre dans le liquide, est suspendu à un point fixe par un fil très-mince et supposé sans pesanteur, celui-ci pour l'équilibre devra être vertical comme les deux forces P et R, dont la différence sera la tension de ce fil. Le point d'attache A du fil au corps solide et les deux points G et C seront dans un même plan vertical; et, en supposant $P > R$, la verticale du point G partagera en D la distance des points A et C en deux parties réciproquement proportionnelles aux forces $P - R$ et R, ce qui détermine la situation du corps suspendu par rapport au fil.

Équilibre des corps flottants.

La condition nécessaire et suffisante pour l'équilibre d'un corps qui flotte à la surface d'un liquide supposé lui-même en équilibre exige, comme dans le cas d'un corps complétement immergé :

1° Que le poids du corps soit égal au poids du fluide déplacé;

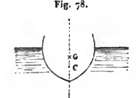
2° Que le centre de gravité du corps et celui de cette portion de liquide soient sur la même verticale.

Les questions relatives à l'équilibre des corps flottants, principalement au point de vue de la stabilité, présentent une grande importance, à cause des applications à l'art de la navigation. Il est indispensable que nous disions ici quelques mots de cette théorie difficile.

Stabilité de l'équilibre des corps flottants. — Le liquide étant supposé homogène, le centre de gravité du fluide déplacé dépend uniquement de la figure de la partie immergée du solide. Nous emprunterons à l'art nautique le terme de *centre de carène*, sous lequel on désigne ce point auquel est appliquée la réaction ou poussée du fluide.

Cela posé, il est évident que la stabilité est assurée si le centre de gravité G du corps est au-dessous du centre de carène C (*fig.* 78); mais cette condition, toujours suffisante,

Fig. 78.

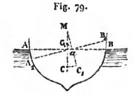


n'est pas nécessaire : il est même facile de voir qu'elle n'est jamais remplie dans les cas les plus habituels. Proposons-nous donc de chercher la véritable condition de stabilité.

Du métacentre. — La plus ancienne solution de ce problème est due à Bouguer; elle est fondée sur la considération d'un point remarquable, connu sous le nom de *métacentre*, point auquel on arrivait par le raisonnement que voici :

Supposons que le navire admette deux plans de symétrie rectangulaires, lesquels soient verticaux dans la position d'équilibre, l'un de ces plans étant dirigé dans le sens de la *longueur*, l'autre dans le sens de la *largeur* du bâtiment. Représentons (*fig.* 79) la section du corps par l'un de ces plans.

Fig. 79.



L'équilibre étant censé établi, la poussée du liquide est exactement égale au poids du corps, et les points d'application de ces deux forces sont sur une même verticale.

Dérangeons maintenant le corps infiniment peu, en respectant la verticalité du plan de la figure, et en nous arrangeant de manière que le volume immergé reste constant, ce qui exige, comme on sait, que le nouveau niveau A_1B_1 coupe la

ligne AB en son milieu a', ou en général que les plans correspondants se coupent au centre de gravité des sections qu'ils déterminent.

Avec ces hypothèses, la poussée du liquide est toujours égale au poids du corps, tout étant toujours supposé en repos, et le centre de gravité G reste en repos, au premier instant du moins. Cela posé, on voit que le moment autour de ce point G de la poussée qui passe par le nouveau centre de carène tend à ramener le corps à sa position d'équilibre ou à l'en écarter, selon que le point G sera au-dessous ou au-dessus du point M.

En donnant à ce point M le nom de *métacentre*, on dit habituellement que *l'équilibre est stable, quand le centre de gravité est au-dessous du métacentre.*

Définition géométrique du métacentre. — Menons à travers la section une série de droites détachant des aires égales, le corps étant pour plus de simplicité supposé cylindrique, et construisons le lieu géométrique des centres de gravité, C, de ces segments égaux.

Je dis en premier lieu que les tangentes à cette courbe seront à chaque instant parallèles aux sécantes correspondantes AB, A_1B_1. En effet, comme tout se réduit à un déplacement horizontal d'une certaine masse, le centre de gravité ne peut se mouvoir qu'horizontalement. Il suit de là que les verticales successives CG, CM sont les normales au lieu CC, et que le métacentre est le centre de courbure de ce lieu.

La théorie précédente n'est pas rigoureuse; M. Duhamel a fait voir que l'équilibre peut être instable, bien que le centre de gravité soit au-dessous du métacentre; il a traité d'une manière complète le problème des oscillations des corps flottants (*Journal de l'École Polytechnique*, 24ᵉ Cahier, 1835) en admettant que, pour les vitesses prises par le corps et le liquide, la loi des pressions ne différait pas de celles de l'Hydrostatique. Chacun sait qu'il n'en est pas ainsi d'une manière générale, ce que le phénomène de la natation suffirait à établir. M. Clebsch a montré que les termes dont on ne tient pas compte dans cette théorie sont du même ordre que ceux que l'on conserve, de sorte que la véritable théorie de la stabilité des corps flottants est beaucoup plus compliquée qu'on ne l'avait

cru, et doit être rapportée, non plus à l'Hydrostatique, mais à l'Hydrodynamique.

Ce qu'on peut dire, quand on ne veut pas pousser cette théorie à fond, c'est que l'excès de la pression hydrodynamique sur la pression hydrostatique ayant pour effet d'augmenter la pression qui résiste aux parois en mouvement, et de produire un vide en arrière de celles qui fuient, cet excès ne peut qu'être favorable à la stabilité, et que la théorie ordinaire fait connaître des conditions suffisantes, sinon nécessaires.

CHAPITRE II.

HYDRODYNAMIQUE.

D'après ce que nous avons dit de l'utilité de l'Hydraulique, on comprend facilement que l'art de conduire et d'utiliser les eaux a dû être cultivé de tout temps avec plus ou moins de succès. Les anciens ont même exécuté de très-beaux travaux dans ce genre, travaux dont quelques-uns subsistent encore et n'ont pas été surpassés.

Mais l'Hydrodynamique rationnelle est une science née il n'y a pas encore deux siècles. Newton a tenté le premier de calculer, par les principes de la Mécanique, le mouvement des fluides, et d'Alembert est le premier qui ait réduit les vraies lois de leur mouvement à des équations analytiques. Clairaut avait donné dans sa *Théorie de la figure de la Terre*, en 1743, les lois générales de l'équilibre des fluides; il ne s'agissait donc que de passer de ces lois à celles de leur mouvement, par le moyen du principe auquel d'Alembert avait réduit, à cette même époque, toute la Dynamique. Ce dernier fit, quelques années après, ce pas important, à l'occasion du prix que l'Académie de Berlin proposa en 1750, sur la théorie de la résistance des fluides. Enfin Euler, simplifiant et complétant les théories de d'Alembert, donna les premières formules générales pour le mouvement des fluides, fondées sur les lois de leur équilibre, et présentées avec la notation simple et lumineuse des différences partielles.

Nous allons commencer par établir ces équations, dont l'intégration, si elle était possible, aurait pour effet de déterminer complétement les circonstances du mouvement et de l'action d'un fluide mû par des forces quelconques. Malheu-

reusement, elles sont si rebelles qu'on n'a pu jusqu'à présent en venir à bout que dans des cas très-limités.

§ I. — Équations générales du mouvement des fluides.

Pour se faire une idée exacte du problème considéré de la manière la plus générale, il faut supposer que, à un instant déterminé que l'on prendra par exemple pour origine des temps ($t = 0$), on connaisse la position de toutes les molécules qui composent le fluide, et les vitesses dont elles sont animées; que, de plus, on donne les forces extérieures qui agissent sur tous les points du fluide, les pressions et les autres conditions relatives à ses limites dans tous les sens.

Cela posé, il s'agit de déterminer le mouvement de chaque molécule en particulier, c'est-à-dire de trouver l'expression des trois coordonnées de cette molécule en fonction du temps, et de connaître de plus la pression et la densité en un point quelconque, la température dans le cas d'un gaz.

Pression dans les liquides en mouvement. — Qu'est-ce que la *pression* en un point d'un liquide en mouvement? C'est l'action mutuelle de deux portions infiniment petites en contact. Peut-on dire qu'elle soit la même dans tous les sens? Comment la mesurer?

En vertu du principe de d'Alembert, un liquide en mouvement peut être considéré comme étant en équilibre sous l'influence des forces extérieures, des pressions et des forces d'inertie. Or les forces d'inertie sont de la nature de celles qui sont proportionnelles aux masses et qui, à la limite, disparaissent devant les pressions; donc on peut étendre au cas d'un liquide en mouvement notre démonstration du principe fondamental de l'égalité de pression en tous sens, et définir la pression comme en Hydrostatique.

Ce principe de l'égalité de pression suppose la fluidité parfaite, c'est-à-dire la pression normale aux surfaces, ou bien l'absence de tout frottement. Or, si cette hypothèse ne s'écarte pas sensiblement de la vérité dans le cas d'un liquide en équilibre, l'expérience prouve que, dans le mouvement des liquides, il se développe un frottement dont l'intensité augmente avec

la vitesse. Pour le reconnaître, il suffit de considérer une rivière. Son mouvement, dans une étendue limitée, est sensiblement uniforme et, s'il n'y avait pas de frottement, il serait accéléré comme celui des corps qui glissent sur des plans inclinés. De plus, si le frottement des liquides suivait à peu près les mêmes lois que celui des corps solides, il y aurait une certaine inclinaison de lit sur laquelle le mouvement serait uniforme; dans tous les autres cas, il y aurait mouvement accéléré ou retardé. Or l'observation montre, au contraire, que le mouvement uniforme s'établit toujours, quelle que soit la pente; seulement la vitesse augmente avec la pente. Il faut donc que le frottement augmente aussi avec la vitesse. Ces réserves étant faites, nous commencerons par négliger le frottement; nous verrons ensuite à en tenir compte.

Du problème général de l'Hydrodynamique. — Les coordonnées x, y, z d'une molécule déterminée sont des fonctions de la seule variable t; mais ces fonctions changent d'une molécule à l'autre et dépendent, par conséquent, des coordonnées a, b, c du point où se trouvait à l'origine du mouvement la molécule que l'on considère. On doit donc regarder x, y, z comme des fonctions des quatre variables indépendantes a, b, c, t; et si l'on peut trouver l'expression générale de ces trois fonctions, on connaîtra exactement le mouvement de telle molécule que l'on voudra, à partir de sa position initiale.

Ce n'est point ainsi que l'on pose habituellement le problème. Au lieu de suivre une molécule dans son mouvement, on se place en un point M déterminé (x, y, z) de l'espace occupé actuellement par le liquide. Soient u, v, w les composantes de la vitesse de la molécule qui passe au point M à l'époque t : au bout d'un certain temps, cette molécule se sera transportée ailleurs; elle sera remplacée au point M par une autre qui sera animée d'une autre vitesse (u_1, v_1, w_1); de sorte qu'en un point fixe les composantes u, v, w doivent être considérées comme des fonctions du temps t; elles varient en outre avec le point M que l'on considère, de sorte que ce sont en définitive des fonctions des quatre variables indépendantes x, y, z, t.

Proposons-nous de déterminer d'une manière générale ces fonctions u, v, w; et, cela fait, il est facile de voir que le pro-

blème pourra être regardé comme résolu (en mettant de côté les difficultés purement analytiques). En effet, si l'on veut alors connaître le mouvement d'une molécule en particulier, il suffira de considérer x, y, z comme des fonctions de t seulement, et de poser les équations

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w.$$

En remplaçant u, v, w par leurs valeurs et intégrant, on aurait x, y, z en fonction de t et de trois constantes arbitraires, et l'on déterminerait les arbitraires en exprimant que, pour $t = 0$, les variables x, y, z prennent les valeurs a, b, c des coordonnées initiales de la molécule que l'on considère.

Le premier problème que nous nous proposerons est donc la détermination de u, v, w; nous introduirons comme inconnues auxiliaires la pression p et la densité ρ.

Équations fournies par le principe de d'Alembert. — Désignons par u', v', w' les dérivées complètes de u, v, w, par rapport au temps, c'est-à-dire les projections de l'accélération totale de la molécule qui occupe la position M à l'époque t. Les équations générales de l'équilibre des liquides doivent être satisfaites en remplaçant X, Y, Z par $X - u'$, $Y - v'$, $Z - w'$; donc on a

$$\frac{dp}{dx} = \rho(X - u'), \quad \frac{dp}{dy} = \rho(Y - v'), \quad \frac{dp}{dz} = \rho(Z - w').$$

Pour obtenir u', v', w', il faut différentier u, v, w, en y regardant x, y, z comme des fonctions de t qui se rapportent au mouvement de la molécule que nous considérons; c'est-à-dire qu'on devra faire

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w.$$

On trouve ainsi

$$u' = \frac{du}{dt} + u\frac{du}{dx} + v\frac{du}{dy} + w\frac{du}{dz},$$
$$v' = \frac{dv}{dt} + u\frac{dv}{dx} + v\frac{dv}{dy} + w\frac{dv}{dz},$$
$$w' = \frac{dw}{dt} + u\frac{dw}{dx} + v\frac{dw}{dy} + w\frac{dw}{dz},$$

d'où

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{dp}{dx} = X - \dfrac{du}{dt} - u\dfrac{du}{dx} - v\dfrac{du}{dy} - w\dfrac{du}{dz}, \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{dp}{dy} = Y - \dfrac{dv}{dt} - u\dfrac{dv}{dx} - v\dfrac{dv}{dy} - w\dfrac{dv}{dz}, \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{dp}{dz} = Z - \dfrac{dw}{dt} - u\dfrac{dw}{dx} - v\dfrac{dw}{dy} - w\dfrac{dw}{dz}. \end{cases}$$

Ces trois équations ne suffisent pas pour la détermination des cinq fonctions p, ρ, u, v, w : il en faut deux de plus, à moins que ρ ne soit constant; et, même dans ce cas, il en restera encore une à trouver. On peut obtenir ces équations d'après la condition que le fluide reste continu.

Équation de continuité. — Remarquons d'abord que la densité ρ est nécessairement liée aux vitesses u, v, w des diverses molécules, indépendamment de toute considération des forces qui leur sont appliquées. En effet, si l'on connaît u, v, w, nous avons vu que le mouvement de la masse fluide serait complétement connu : on pourrait savoir où sont situées à un instant quelconque les diverses molécules qui occupaient précédemment des positions données; on pourrait savoir en particulier quelles sont les molécules qui se trouvent à cet instant dans l'intérieur d'un élément de volume quelconque, et par conséquent quelle est la masse totale du fluide contenu dans cet élément; on en conclurait la densité ρ, c'est-à-dire la masse de l'unité de volume.

Pour traduire analytiquement ces considérations bien simples, concevons que tout l'espace occupé par le fluide soit partagé en parallélépipèdes infiniment petits de volume $dx\,dy\,dz$. Après le temps dt, ces parallélépipèdes doivent se trouver encore remplis par le fluide, excepté peut-être ceux qui se trouveraient à la surface libre; et par conséquent l'accroissement de la densité dans chacun d'eux, $\dfrac{d\rho}{dt}dt$, sera égal à l'accroissement de la masse qui y était renfermée, divisé par le volume : il faut donc chercher l'excès de la masse du fluide qui est entré dans un quelconque d'entre eux sur la masse qui en est sortie pendant le temps dt.

La direction de la vitesse variant d'une manière continue,

s'il entre du fluide par une face, il en sortira par la face opposée, et si l'on calcule l'excès de la masse de la première quantité sur la seconde, pour les trois couples de faces parallèles, la somme de ces excès sera l'accroissement de la masse renfermée dans le parallélépipède.

Soit d'abord la face parallèle aux y, z : il entre d'un côté

$$\rho u\, dy\, dz\, dt;$$

il sort

$$\left(\rho u + \frac{d\rho u}{dx}\, dx\right) dy\, dz\, dt;$$

l'excédant est

$$-\frac{d(\rho u)}{dx}\, dx\, dy\, dz\, dt.$$

En divisant la somme des trois excès par $dx\, dy\, dz$, on devra avoir $\frac{d\rho}{dt}\, dt$; de là l'équation dite *de continuité*

$$(2) \qquad \frac{d\rho}{dt} + \frac{d\rho u}{dx} + \frac{d\rho v}{dy} + \frac{d\rho w}{dz} = 0.$$

Équation fournie par la nature physique du fluide. — Examinons maintenant de quelle manière l'équation (2) doit être interprétée suivant la nature du fluide. Nous étudierons seulement les deux cas suivants :

1° Liquide absolument incompressible, homogène et de température constante. Dans ce cas ρ est indépendant du temps. On a $\rho = \text{const.}$, et l'équation (2) prend la forme

$$(3) \qquad \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0.$$

On a alors quatre inconnues seulement à déterminer et quatre équations.

2° Gaz de température constante (*). On sait qu'alors la

(*) L'hypothèse d'un gaz en mouvement dont tous les points sont en parfait équilibre de température ne se réalise jamais dans les applications; aussi la théorie actuelle doit-elle être regardée comme complètement insuffisante pour les besoins de la pratique.

densité est proportionnelle à la pression, et l'on a entre ces deux quantités une équation de la forme

$$(4) \qquad p = K\rho.$$

Telle est la cinquième équation qui complète la solution générale du problème.

L'intégration des équations différentielles introduira des fonctions arbitraires qui devront être déterminées d'après les circonstances initiales du mouvement, et aussi d'après les conditions relatives à la surface du fluide, lequel peut se mouvoir le long de parois fixes ou mobiles, et éprouver sur sa surface libre des pressions constantes ou variables. On suppose ordinairement que les points qui sont d'abord en contact avec une paroi mobile ou immobile y restent indéfiniment, et que les points qui appartiennent à la surface libre ne cessent jamais d'en faire partie. Ces hypothèses restreignent les déplacements possibles, et, malgré cela, il est encore bien peu de cas où les calculs puissent s'effectuer complétement.

On peut dire que les efforts des géomètres ont servi seulement à montrer la grande difficulté de soumettre à l'analyse le mouvement des fluides, et l'on n'a pas même tenté de faire l'application de la théorie précédente à l'étude du cours des rivières et des mouvements de l'atmosphère.

C'est ainsi qu'on a senti la nécessité de prendre l'expérience pour guide dans des recherches aussi délicates. Torricelli, Mariotte, Guglielmini, Pitot, Couplet avaient déjà marché dans cette voie, mais sans avoir trouvé des données suffisantes pour établir un ensemble constituant une véritable science expérimentale. Ils furent suivis par Bossut, Dubuat, Prony, Eytelwein, Poncelet, etc., sans parler de tous les autres plus modernes qui continuent la tâche commencée par leurs devanciers.

Quant aux équations générales, on en a jusqu'ici tiré très-peu de chose; mais il ne faut pas oublier que les théorèmes généraux de la Mécanique rationnelle s'appliquent aux fluides comme à tous les systèmes de points matériels, et il arrivera dans un grand nombre de cas que l'application de l'un de ces théorèmes pourra conduire au résultat cherché, au moins avec un certain degré d'approximation. Le théorème des forces

vives notamment a servi de base à l'*Hydrodynamique* de Daniel Bernoulli, imprimée en 1738, Ouvrage qui brille d'ailleurs par une analyse aussi élégante dans sa marche que simple dans ses résultats. Nous aurons fréquemment à employer ce théorème sous la forme donnée par Daniel Bernoulli, forme que nous allons établir dans le paragraphe suivant.

§ II. — Du régime permanent d'une masse liquide en mouvement.

Plaçons-nous maintenant au point de vue des applications, et considérons un liquide en mouvement dans des conditions quelconques. Au commencement du mouvement, il se passe des phénomènes plus ou moins compliqués; mais au bout d'un certain temps on obtient généralement un état ou régime permanent dans lequel toutes les circonstances restent les mêmes aux mêmes points de l'espace, et ne varient que d'un point à l'autre.

Ainsi, en un point quelconque, la vitesse du liquide sera constante en grandeur et en direction, et, par conséquent, deux molécules qui, à des époques déterminées, auront occupé une même position, parcourront la même trajectoire d'une manière identique.

Les rivières, dans leur cours habituel, nous donnent un exemple de masses liquides à l'état de régime permanent. S'il arrive une crue, cet état se trouve remplacé au bout de quelque temps par un régime différent, lequel persistera jusqu'à de nouvelles perturbations.

Filet liquide. — Soit un point M du liquide (*fig.* 80); par ce

Fig. 80.

point, conduisons un plan normal à la vitesse commune de toutes les molécules qui y passeront successivement, et tra-

çons dans ce plan autour du point M une courbe infiniment petite quelconque. L'ensemble des trajectoires des molécules qui traversent l'aire plane limitée par cette courbe, et qui ne se sépare pas dans le mouvement, forme un *filet liquide*. Le filet peut se dilater, se rétrécir, mais nous admettrons que la section ne varie que très-peu et par degrés insensibles, sans quoi les frottements des molécules liquides les unes sur les autres ne seraient plus négligeables.

Étude des diverses circonstances du mouvement permanent d'un filet liquide supposé sans frottement. — Occupons-nous d'abord des équations au moyen desquelles nous établirons la continuité et la permanence du mouvement du filet.

Soit $d\omega$ la section du filet en un point quelconque. La masse du fluide qui passe dans cette section pendant le temps dt est $d\omega\, v\, dt$; et si dQ représente le volume débité par seconde, lequel est rigoureusement uniforme en vertu de la permanence, on aura

$$dQ = v\, d\omega.$$

Le filet liquide étant continu, on devra avoir le même débit pour toutes les sections $d\omega'$, $d\omega''$,... du filet; donc on a

$$dQ = v\, d\omega = v'\, d\omega' = v''\, d\omega'' = \ldots;$$

telle est l'équation dite *de permanence*.

Théorème de D. Bernoulli. — Cela posé, le principe des forces vives suffit pour étudier les circonstances du mouvement d'un filet liquide soumis à l'action de la pesanteur, quand on néglige les frottements des molécules les unes sur les autres et sur les parois encaissant le filet.

Soient MM′ (*fig.* 81) une portion de filet liquide soumis à la seule action de la pesanteur; v, $d\omega$, p la vitesse, la section et la pression en M; v', $d\omega'$, p' les mêmes quantités au point M′; Π le poids spécifique.

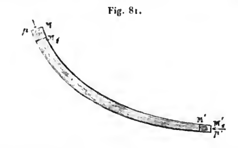
Écrivons le théorème des forces vives pour un petit déplacement du liquide compris entre les deux sections quelconques MM′.

Supposons que, par l'effet du déplacement, la section M soit arrivée en M_1, et la section M′ en M'_1 au bout du temps dt.

Dans l'évaluation de l'accroissement de force vive, il n'y a

pas à tenir compte de la force vive de la portion M_1M', laquelle figure également en vertu de la permanence dans l'expression de la force vive initiale et de la force vive finale, avec des va-

Fig. 81.



leurs égales dans les deux cas; il suffira de prendre la force vive de la masse $M'M_1'$ et d'en retrancher celle de la portion MM_1. On aura ainsi pour le demi-accroissement de force vive, en désignant le débit par dQ,

$$\frac{1}{2}\,\frac{dQ\,dt\,\Pi}{g}\,(v'^2 - v^2).$$

Évaluons maintenant le travail des forces qui agissent sur le filet. Ces forces sont la pesanteur et les pressions p' et p. Or on sait, en premier lieu, que le travail de la pesanteur correspondant à un déplacement quelconque d'un système de points matériels dépend uniquement du poids total du système et de la quantité dont le centre de gravité s'est élevé ou abaissé; donc on ne l'altère pas en supposant à la place du mouvement réel un autre mouvement quelconque, pourvu que le déplacement final du centre de gravité ne soit pas altéré; ici l'on peut supposer que le mouvement ait consisté simplement dans le transport de la masse MM_1 à la position $M'M_1'$; de sorte que le travail de la pesanteur est

$$\Pi\,dQ\,dt(z - z'),$$

$z - z'$ étant la différence de niveau du centre de gravité des volumes MM_1 et $M'M_1'$, et, comme ces volumes sont infiniment petits, $z - z'$ représente aussi la différence de niveau des points M et M' de ces volumes.

Le travail de la pression p est positif et égal à

$$p\,d\omega v\,dt \quad \text{ou} \quad p\,dQ\,dt;$$

celui de la pression p' est négatif et égal à

$$p'\,d\omega' v'\,dt \quad \text{ou} \quad p'\,dQ\,dt;$$

donc, enfin, on a l'équation

$$\frac{1}{2}\frac{dQ\,dt\,\Pi}{g}(v'^2-v^2)=\Pi(z-z')\,dQ\,dt+p\,dQ\,dt-p'\,dQ\,dt,$$

ou, en divisant par $\Pi\,dQ\,dt$,

$$(1) \qquad \frac{v'^2}{2g}-\frac{v^2}{2g}=(z-z')+\frac{p}{\Pi}-\frac{p'}{\Pi}.$$

Sous cette forme, tous les termes de cette équation représentent des hauteurs :

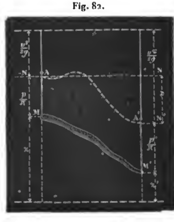
$\frac{v^2}{2g}$ est la hauteur due à la vitesse v;

$\frac{v'^2}{2g}$ est la hauteur due à la vitesse v';

$\frac{p}{\Pi}$ et $\frac{p'}{\Pi}$ sont les hauteurs représentatives des pressions.

Concevons qu'aux différents points de notre filet (*fig.* 82)

Fig. 82.



nous élevions des tubes étroits MA, M′A′ débouchant dans

le vide. L'eau s'élèvera dans ces tubes à des hauteurs marquées par $\frac{p}{\Pi}$, $\frac{p'}{\Pi}$, ..., d'après la définition de la pression des liquides. Nous nommerons ces tubes *tubes piézométriques*, d'après d'Aubuisson, qui s'en est servi pour mesurer la pression d'un liquide en mouvement aux différents points d'un tuyau de conduite.

Cela posé, $z + \frac{p}{\Pi}$ est la hauteur au-dessus du plan fixe de comparaison du sommet de la colonne piézométrique du point M, $z' + \frac{p'}{\Pi}$ est la hauteur analogue pour le point M', et l'équation (1) veut dire que :

THÉORÈME. — *La différence des hauteurs dues aux vitesses en deux points quelconques d'un même filet liquide est égale à la différence de niveau des sommets des colonnes piézométriques correspondantes.*

Il résulte de là que si, à chaque colonne piézométrique, on ajoute une hauteur égale à la hauteur due à la vitesse du point correspondant de la veine fluide, on arrivera toujours à un niveau constant; c'est ce que l'équation montre si on la met sous la forme

$$(2) \qquad \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\Pi} + z = \frac{v'^2}{2g} + \frac{p'}{\Pi} + z'.$$

Ce niveau constant s'appelle le *plan de charge*.

Pour faire une application de ce théorème, considérons, dans une veine fluide suffisamment mince (*fig.* 83), diverses sec-

Fig. 83.

tions AB, A'B', A''B'' qui soient traversées à peu près rectangulairement par le liquide, et dont les centres de gravité soient

G, G′, G″. La variation de section entre AB et A″B″ est supposée continue et telle, que le liquide remplissant cette portion du vase y coule par filets à peu près d'égale vitesse, et par conséquent sans frottement sensible. Dans ce cas, en conservant les notations précédentes, on a

$$\frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\Pi} + z = \frac{V'^2}{2g} + \frac{p'}{\Pi} + z' = \frac{V''^2}{2g} + \frac{p''}{\Pi} + z''$$

et

$$V\Omega = V'\Omega' = V''\Omega''.$$

Ainsi, quand on connaîtra les aires Ω, Ω', Ω'' et les ordonnées z, z', z'', on aura, entre les trois vitesses et les trois pressions, quatre équations qui permettront de déterminer quatre de ces quantités en fonction des deux autres.

Supposons, par exemple, que les inconnues soient les trois vitesses et la pression p'. On trouvera d'abord, sans avoir égard à la section intermédiaire et en éliminant V,

$$(3) \qquad V'' = \sqrt{\frac{2g(z - z'') + \frac{p}{\Pi} - \frac{p''}{\Pi}}{1 - \left(\frac{\Omega''}{\Omega}\right)^2}}.$$

Mais il importe de remarquer que cette formule est soumise à un cas d'exception.

Calculons, en effet, la pression p', nous avons pour cela l'équation

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} &\left(z + \frac{p}{\Pi}\right)\left(\frac{1}{\Omega''^2} - \frac{1}{\Omega'^2}\right) + \left(z' + \frac{p'}{\Pi}\right)\left(\frac{1}{\Omega^2} - \frac{1}{\Omega''^2}\right) \\ &\qquad + \left(z'' + \frac{p''}{\Pi}\right)\left(\frac{1}{\Omega'^2} - \frac{1}{\Omega^2}\right) = 0. \end{aligned} \right.$$

Il est possible que cette équation, si z' est trop considérable, donne pour p' une valeur négative. Dans ce cas, le mouvement permanent est impossible, le liquide se divise comme il fait au sommet d'un siphon quand ce sommet est à plus de 32 pieds au-dessus des niveaux du liquide. Les deux colonnes sont alors à une pression nulle.

Ce résultat est indépendant des frottements dont nous au-

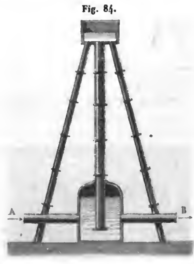
rons plus tard à examiner l'influence. Remarquons encore que l'hypothèse d'une pression nulle ne se réalise même jamais dans la pratique, à cause de l'air et de la vapeur qui se dégagent de l'eau dès que la pression est suffisamment diminuée.

Quoi qu'il en soit, tant que l'on fait abstraction des frottements, le plan de charge conserve un niveau invariable; il faut bien se garder de le confondre avec la ligne des niveaux piézométriques, qui peut s'abaisser ou se relever, selon que la vitesse augmente ou diminue, ce qui correspond pour la section à des variations inverses. Ce plan indique la plus grande hauteur à laquelle puisse parvenir le filet liquide sans vitesse, et à la condition de déboucher sous une pression nulle.

Si l'on veut faire monter le liquide au delà de ce niveau, il faut exercer en un point quelconque une pression supplémentaire, au moyen d'une pompe par exemple. On augmentera le niveau de charge en ce point et, par suite, en tous les autres.

Application du principe des piézomètres. — On trouve une application intéressante de ces principes si simples dans un

Fig. 84.



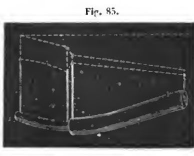
appareil installé aux environs d'Amsterdam, à proximité de l'usine qui fournit à la ville l'eau potable nécessaire à la consommation des habitants.

Dans les distributions d'eau ordinaires, l'eau se trouve emmagasinée dans de grands réservoirs qui sont établis à une hauteur suffisante, pour desservir toutes les conduites; elle y est maintenue au niveau convenable au moyen de pompes.

Ce système n'était pas possible à Amsterdam, en l'absence de relief dans les terrains environnants. La consommation est alimentée directement à l'aide de pompes puisant dans de grands bassins contenant de l'eau filtrée. Le jeu de ces pompes doit donc être réglé de manière que la charge ait toujours une valeur convenable. Pour cela, on a installé un piézomètre en un point de la conduite AB (*fig.* 84); le niveau de l'eau dans la colonne, indiqué au moyen d'un flotteur, sert de guide au mécanicien, qui fait marcher un plus ou moins grand nombre de pompes, de manière à maintenir la charge à peu près au niveau normal. Quand ce niveau est notablement dépassé, l'eau arrive dans un petit bassin supérieur, d'où elle s'écoule par un orifice de trop-plein.

Des pertes de charge. — Dans une distribution d'eau d'une grande longueur, le niveau de charge n'est plus constant : il y a des résistances qui se traduisent par des pertes de charge; les unes de ces résistances agissent d'une manière continue, comme les frottements; d'autres, d'une manière discontinue, comme les travaux résistants qui se produisent en certains points, tels que les prises d'eau. En un point déterminé, l'eau ne pourra couler que si la ligne de charge est au-dessus du niveau de l'orifice. Il importe donc de connaître cette ligne qui, à partir

Fig. 85.



du point de départ, va en s'abaissant continuellement, différant en cela de la ligne des niveaux, piézométriques qui peut

se relever quand, par suite d'une augmentation de section dans la veine (*fig.* 85), une partie de la vitesse se trouve transformée en pression; mais de pareilles transformations sont toujours accompagnées d'une perte de charge, comme nous le verrons.

Puits artésiens. — Les nappes d'eau souterraines sont dans le même cas que les cours d'eau terrestres; en chaque point il existe un niveau qui représente la charge sur ce point, et qui indique le niveau maximum auquel l'eau soit susceptible de jaillir. Il importe donc, quand on veut forer de pareils puits, de connaître, autant que possible, les allures de la surface qui donne la charge en chaque point.

Remarques sur l'application du théorème de Daniel Bernoulli. Pour appliquer le théorème de Daniel Bernoulli à un cours d'eau, et même à une veine liquide assez petite, mais non infiniment petite, il faudrait savoir comment les pressions varient dans l'intérieur de cette veine; on aurait alors la vitesse v en chaque point par le théorème qui précède, et le débit total serait

$$Q = \int v\,d\omega.$$

Or c'est là un problème insoluble jusqu'ici d'une manière générale, même en négligeant les frottements.

Il n'est pas possible de savoir où sont les niveaux piézométriques dans les divers filets qui constituent une veine fluide; donc le théorème précédent, qui donne la loi des vitesses en fonction de ces niveaux, ne peut servir à rien, ou du moins il ne donne en général qu'une relation unique, insuffisante pour résoudre les questions qui intéressent la pratique.

Mais il en est autrement dans quelques cas simples pour lesquels on admet les règles suivantes, qui supposent que, dans une portion du liquide n'ayant pas une grande étendue, le frottement des molécules les unes sur les autres peut être négligé. Cette hypothèse est confirmée par l'expérience et sera expliquée plus tard par l'étude des effets du frottement dans les conduites d'eau et les canaux découverts.

Première règle. — Si un courant ou une portion de courant se compose de filets liquides dont chacun ait un mouvement

rectiligne et sensiblement uniforme, les pressions de leurs molécules entre elles, en vertu de la pesanteur, et abstraction faite des frottements, suivent les mêmes lois que dans l'état de repos du liquide; car les forces qui sollicitent chaque filet en mouvement uniforme satisfont aux conditions de l'équilibre. Ainsi : 1° si deux points M, M', assez peu éloignés l'un de l'autre pour que le frottement dans l'intervalle soit négligeable, ont la différence de niveau z, que la pression par mètre soit p au point supérieur M, et p' au point M, on a $p' = p + \Pi z$, même quand les points M et M' n'appartiennent pas à un même filet; 2° si l'on imagine dans le courant une section plane peu étendue dont l'aire soit A, et dont le centre de gravité soit à la hauteur H au-dessous du point où la pression par mètre est p, la pression totale sur la section A est $A(p + \Pi H)$ et la pression moyenne est $p + \Pi H$, celle qui a lieu au centre de gravité de la section.

Deuxième règle. — Les mêmes lois ont encore lieu dans un liquide ayant des mouvements quelconques, mais très-lents; car cette lenteur n'a lieu que dans un état très-voisin de l'équilibre. Nous avons vu qu'il n'en est pas ainsi quand on étudie les petits mouvements d'un corps flottant; c'est que, dans ce dernier cas, il s'agissait de calculer l'effet des pressions sur ces vitesses très-petites, et il n'était plus permis de négliger des forces qui étaient du même ordre de grandeur que les effets à déterminer.

Troisième règle. — Si, dans une certaine section transversale du courant, les filets ont des vitesses parallèles, égales ou inégales, et que, immédiatement après cette section, les filets décrivent à peu près les paraboles que chaque molécule parcourrait, en vertu de sa vitesse et de son poids, si elle était isolée dans le vide, la pression à l'intérieur du liquide est la même qu'à l'extérieur; car, puisque les molécules se meuvent comme si elles n'étaient soumises qu'à l'action de la pesanteur, les pressions latérales que chaque filet éprouve se font équilibre deux à deux et sont, par conséquent, toutes égales à la pression extérieure. On voit que, dans ce cas, la loi des pressions est tout à fait différente de celle qui régit les liquides en équilibre.

On ne devra donc jamais employer le théorème de D. Ber-

noulli sans s'être assuré que l'une des trois règles précédentes est applicable, autrement on aura toujours le droit d'écrire l'équation générale; mais celle-ci ne pourra être d'aucune utilité.

Quoi qu'il en soit, le seul principe des forces vives nous a suffi pour nous rendre compte des différentes circonstances du mouvement *permanent* d'un *filet* liquide, à la condition de négliger les frottements et les travaux résistants de toute nature, développés par les actions mutuelles des molécules liquides et des parois fixes ou mobiles.

D'après ce théorème, sous la forme que lui a donnée D. Bernoulli, en divers points d'un même *filet* liquide :

La différence des hauteurs dues aux vitesses est égale à la différence de niveau des sommets des colonnes piézométriques.

Autrement, en nous reportant à la définition de la *ligne de charge :*

La vitesse en chaque point est la même que celle qu'acquerrait chaque molécule liquide en tombant librement dans le vide, depuis le niveau qui représente la charge jusqu'à celui du sommet de la colonne piézométrique.

Sous cette forme, le théorème s'applique même au cas où les frottements ne sont plus négligeables, si l'on tient compte de la dénivellation de ligne de charge produite par ces frottements; mais on suppose toujours qu'il s'agisse d'un filet liquide infiniment petit.

Un *filet* liquide a une longueur indéfinie, mais une section infiniment petite; de la sorte, dans toute l'étendue de cette section, la pression est uniforme, et la vitesse est constante.

Pour appliquer le théorème de D. Bernoulli à une *veine* fluide de dimensions finies, quelque petites que soient ces dimensions, il faut connaître la loi des pressions pour en conclure la loi des vitesses; or, c'est là ce qui n'est possible que dans les trois cas que nous avons distingués.

Nous allons, par des applications variées, montrer comment on doit étudier, soit les cas où le théorème est applicable, soit ceux où il ne l'est pas.

§ III. — Écoulement permanent d'un liquide par un petit orifice percé en mince paroi.

Un liquide homogène s'écoule par une petite ouverture pratiquée dans la paroi d'un vase ou réservoir.

L'écoulement est supposé *permanent*, ce qui exige que le réservoir soit, par un moyen quelconque, entretenu constamment plein d'eau à la même hauteur. L'expérience prouve que, dans ces conditions, et l'aire de l'orifice étant assez petite par rapport aux dimensions du vase, le régime permanent s'établit très-promptement; c'est au moment seulement où il est établi que nous étudions le mouvement, c'est-à-dire que nous nous proposons de demander à l'observation ou au calcul:

1° La *vitesse d'écoulement* qui anime les molécules fluides dans les environs de l'orifice;

2° La *dépense* correspondante par seconde.

Orifice en mince paroi. — Le premier cas dont nous ayons à nous occuper est celui où l'orifice est percé en *mince paroi*, c'est-à-dire qu'à l'endroit de l'orifice les parois ont été amincies de manière que l'épaisseur traversée par le liquide soit moindre que la moitié de la plus petite dimension de l'ouverture (*fig.* 86).

Fig. 86.



Théorème de Torricelli. — Les lois qui règlent les vitesses d'écoulement des divers fluides par le moyen d'orifices en mince paroi ont été étudiées expérimentalement par Torricelli; c'est là le premier pas fait dans l'Hydrodynamique. Archimède et Galilée (car l'intervalle qui a séparé ces deux grands génies disparaît dans l'histoire de la Mécanique) ne s'étaient occupés que de l'équilibre des fluides.

Torricelli a trouvé que *les vitesses d'écoulement sont pro-*

portionnelles aux racines carrées des charges comptées sur le centre de gravité de l'édifice. De plus, *ces vitesses sont indépendantes de la nature du liquide soumis à l'expérience.*

Hauteurs dues aux vitesses.

Hauteurs.	Vitesses.
m	m
0,01	0,443
0,10	1,401
0,20	1,921
0,30	2,426
0,40	2,801
0,50	3,132
0,60	3,431
0,80	3,961
1,00	4,429
1,30	5,050
1,50	5,424
2,00	6,264
2,50	7,003
3,00	7,672
4,00	8,858
5,00	9,904

Tel est le théorème de Torricelli. L'inventeur l'a donné comme un fait d'expérience à la fin de son traité *De motu naturaliter accelerato*, 1643. Newton, à plusieurs reprises, et en même temps Varignon, entreprirent en vain de démontrer ce théorème. La première démonstration rigoureuse est due à D. Bernoulli; elle est fondée sur le principe des forces vives, dont nous avons déjà indiqué l'application à l'étude des lois du mouvement des fluides.

Mais avant d'exposer l'application de la formule de D. Bernoulli à la question actuelle, qui est extrêmement délicate, il est indispensable d'étudier de très-près le phénomène au point de vue physique, afin de voir si et comment nous pourrons utiliser l'une de nos trois règles, sans lesquelles le théorème de D. Bernoulli n'est qu'une lettre morte, au même titre que les équations générales d'Euler.

Étude physique du phénomène. — Cette étude a été faite d'abord par Bossut et reprise d'une manière très-complète par Savart, dont elle constitue un des plus beaux travaux. Nous lui emprunterons seulement quelques observations.

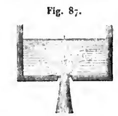
Contraction de la veine fluide. — La veine considérée dans son ensemble se compose de deux parties bien distinctes. La première, qui touche à l'orifice, est limpide, transparente, en apparence immobile, et ressemble à une tige de cristal. Plus loin la veine est agitée, louche, et présente de distance en distance des renflements ou ventres régulièrement espacés, dont le diamètre maximum est plus grand que celui de l'orifice.

Contraction de la veine. — Occupons-nous de la première partie. Le phénomène capital qu'elle présente est celui de la diminution rapide qui s'observe dans la section de la veine à partir de l'orifice jusqu'à une distance de celui-ci égale, d'après l'abbé Bossut, à environ la moitié de son diamètre. Le même observateur a reconnu que le diamètre de la veine en ce point (section de plus grande contraction) est à celui de l'orifice à peu près dans le rapport de 12 à 14,7, tellement que l'aire de l'orifice est à l'aire de la veine contractée comme 3 est à 2 environ. On sent bien que cette mesure est très-délicate à prendre et que nous ne pouvons donner que des résultats moyens. Quoi qu'il en soit, le fait important à notre point de vue, c'est, en premier lieu, la *convergence* des filets périphériques au moment de la sortie du vase, convergence dont résulte nécessairement, pour les filets intérieurs, une pression plus grande que celle qu'on calculerait d'après les lois de l'Hydrostatique; en second lieu, la disparition de cette convergence à une petite distance de l'orifice, au point où la section cesse de diminuer et où les filets sont sensiblement parallèles; si la paroi d'émersion n'est pas horizontale, la veine décrit, à partir de ce point, une courbe qui se rapproche beaucoup de la parabole assignée par la théorie comme trajectoire des points matériels soumis à la simple action de la pesanteur.

Explication de la contraction. — Il est facile de se rendre compte du phénomène de la contraction. L'eau ne peut sortir d'un réservoir par un orifice quelconque, sans que ses parti-

cules n'affluent de toutes parts, autant qu'elles le peuvent, vers cet orifice, comme vers un centre, par un mouvement accéléré, et suivant toutes les directions. Les seuls filets qui répondent à la partie centrale de l'orifice décrivent à peu près rigoureusement une ligne qui sera verticale si l'orifice est percé au fond d'un vase, dans une paroi horizontale (*fig.* 87).

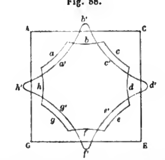
Fig. 87.



Les autres filets sont obligés de se détourner de la verticale pour s'approcher de l'orifice, et, en y arrivant, ils ont des directions qui s'approchent plus ou moins de l'horizontale. Ces filets doivent se gêner mutuellement dans leurs mouvements, et les molécules liquides se trouvent, par suite, obligées de suivre des trajectoires courbes : elles donnent alors naissance à des forces centrifuges qui ont pour effet d'augmenter la pression dans l'intérieur de la veine au droit de l'orifice.

Inversion de la veine. — Un autre fait qui met bien en évidence l'existence de pressions centrifuges est celui qu'on

Fig. 88.

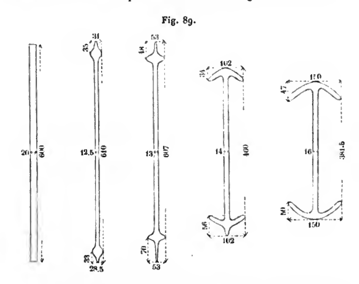


désigne ordinairement sous le nom d'*inversion de la veine*, et qui est présenté par tous les orifices dont la section n'est pas

circulaire. MM. Poncelet et Lesbros ont étudié ce phénomène en détail pour plusieurs orifices différents (*fig.* 88); si, par exemple, l'orifice est carré, la section de la veine, à une distance égale à deux fois et demie le diamètre de cet orifice, est encore à très-peu près un carré; seulement les diagonales de cette section sont parallèles aux côtés de l'orifice; les côtés sont d'ailleurs légèrement courbés. Si l'on fait une section entre les deux premières, on obtient une figure qui est en quelque sorte une transition entre ces deux-ci. Cela paraît provenir de ce qu'à l'endroit où les filets qui viennent des milieux des côtés tendent à devenir parallèles, ceux qui viennent des angles tendent encore à se rapprocher et obligent les autres à s'éloigner.

MM. Poncelet et Lesbros ont aussi étudié un orifice rectangulaire ayant 60 centimètres de hauteur sur 2 centimètres de largeur, et ils ont cherché la forme de la section de la veine aux distances $0^{cm},10$, $0^{cm},30$, $0^{cm},70$, $1^{cm},10$ de l'orifice, et ils ont trouvé les courbes représentées dans les figures ci-dessous.

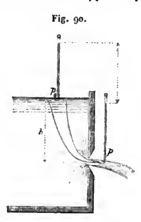
Fig. 89.



Détermination théorique de la vitesse. — Une fois ces phénomènes étudiés, l'application du calcul est très-simple. On

ne peut pas appliquer le théorème de Bernoulli pour les parties de la veine voisines de l'orifice, parce qu'on ne connaît pas en cette région la loi des pressions; tout ce qu'on sait, c'est qu'elles sont plus grandes que celles que donneraient les lois de l'Hydrostatique; mais, au point où la section est contractée, les vitesses sont parallèles et les molécules décrivent, sous l'action de ces vitesses et de la pesanteur, leurs trajectoires paraboliques à peu près indépendamment les unes des autres (*fig.* 90). Nous pouvons donc supposer que la pression est

Fig. 90.



constante dans toute l'étendue de la veine, et égale à la pression atmosphérique ambiante, et, par suite, nous nous trouvons dans le troisième cas où le théorème de D. Bernoulli est applicable.

Nous aurons immédiatement l'équation

$$\frac{v^2}{2g} - \frac{v_0^2}{2g} = h + \frac{p_0}{\Pi} - \frac{p}{\Pi}.$$

L'orifice étant généralement très-petit par rapport à la section du réservoir, on peut, sans erreur sensible, négliger le terme $\frac{v_0^2}{2g}$; et, si l'on suppose de plus que la pression atmosphérique est la même à la surface libre du liquide qu'au niveau de l'orifice, on aura simplement

$$v = \sqrt{2gh};$$

de sorte que *la vitesse du liquide est la même que celle d'un corps qui tombe librement dans le vide de la hauteur h.*

Si l'orifice d'écoulement est noyé ou si le liquide débouche dans un réservoir où la pression soit supérieure ou inférieure à celle de l'atmosphère, il faudra conserver dans la formule le terme $\frac{p_0}{\Pi} - \frac{p}{\Pi}$.

Enfin, dans certains cas, il y aura lieu de tenir compte de la vitesse au niveau supérieur v_0.

Vérification expérimentale. — Cette formule, comme toutes celles que nous trouverons dans cette théorie au moyen d'hypothèses souvent un peu douteuses, ne doit être admise qu'après une vérification expérimentale. Ici l'on peut faire cette vérification de deux manières :

1° On peut diriger le jet verticalement de bas en haut, et l'on reconnaît que le liquide s'élève sensiblement à la hauteur h;

2° On peut construire la parabole que forme la veine fluide au moyen d'anneaux fixés à un tableau, et qu'on place de manière à les faire traverser par la veine. En opérant de cette manière, au bout de quelques tâtonnements, on arrive à une vitesse

$$v = 0{,}98\sqrt{2gh},$$

et même à

$$v = 0{,}993\sqrt{2gh}$$

dans le cas de vitesses très-faibles.

Une vérification à 1 ou 2 pour 100 près suffit pour montrer qu'on a fait une bonne théorie, et qu'on peut accepter le résultat auquel elle a conduit.

Dépense. — Calculons maintenant la dépense. Si l'on désigne par Ω l'aire de la section contractée, les vitesses des filets liquides étant sensiblement perpendiculaires à cette section, on aura évidemment pour la dépense par seconde

$$Q = \Omega\sqrt{2gh}.$$

Il s'agit de trouver Ω, connaissant l'aire A de l'orifice. Ici la théorie est complétement impuissante, et il faut l'abandonner pour recourir à l'expérience.

On peut d'abord mesurer directement Ω à l'aide d'un compas d'épaisseur; mais on n'arrive pas ainsi à une grande précision. La meilleure méthode consiste à mesurer la dépense Q par seconde, et à déterminer ensuite Ω au moyen de la formule

$$Q = \Omega\sqrt{2gh}.$$

L'expérience a montré que Ω est sensiblement proportionnelle à A et qu'on peut écrire $\Omega = mA$, d'où

$$Q = mA\sqrt{2gh}.$$

Dans le cas d'un petit orifice en mince paroi, dont les deux dimensions diffèrent peu l'une de l'autre, et enfin quand la charge sur le centre est assez grande pour la stabilité du mouvement permanent, le coefficient m est à peu près égal à 0,62.

Beaucoup d'auteurs appellent $\sqrt{2gh}$ la *vitesse théorique*, et $A\sqrt{2gh}$ la *dépense théorique* d'un orifice A sous une charge h. La première de ces expressions est juste, et nous avons vu que l'expérience vérifie autant qu'on peut l'espérer les déductions de la théorie. Au contraire, l'expression de *dépense théorique* pour désigner une dépense qui n'est nullement donnée par la théorie est extrêmement vicieuse. La théorie nous indique que, au point où la vitesse est égale à $\sqrt{2gh}$, la section est plus petite que A, et qu'au point où la section est A, la vitesse est plus petite que $\sqrt{2gh}$, à cause des pressions centrifuges résultant du mouvement curviligne des molécules, pressions dont l'effet est de relever le niveau piézométrique, et par conséquent de diminuer la vitesse.

Quoi qu'il en soit, le coefficient de la dépense $m = 0,62$ est principalement destiné à représenter la diminution de la section de sortie; c'est un *coefficient de contraction*, quoiqu'il provienne aussi en partie de ce que la vitesse à la section contractée n'est pas tout à fait égale à $\sqrt{2gh}$, comme nous l'avons vu.

Du coefficient de contraction. — Ce coefficient 0,62 suppose de petits orifices circulaires de 2 à 16 centimètres de diamètre percés dans une paroi plane, et soumis à une charge

assez forte, charge que l'on mesure habituellement sur le centre de gravité de l'orifice. Le coefficient *m diminue lorsque les charges augmentent* au delà d'une certaine limite, et, *à charge égale, il augmente un peu lorsque les dimensions de l'orifice diminuent.* Il dépend du reste très-peu de la forme de cet orifice, au moins tant que celui-ci reste très-petit et de forme plus ou moins carrée ou circulaire.

Nous venons de voir qu'en général la théorie est impuissante à déterminer la valeur numérique du coefficient de contraction; cependant elle peut le faire dans deux cas particuliers qui sont :

1° Celui d'un *orifice* dit *parfaitement évasé;*

2° Celui d'un *orifice pourvu de l'ajutage rentrant de Borda.*

Orifice parfaitement évasé. — Si, au lieu d'amincir la paroi comme nous l'avons d'abord supposé, on *évase* l'orifice en dedans (*fig.* 91), de manière à donner à la portion de la veine

Fig. 91.



fluide contenue dans l'épaisseur de la paroi précisément la forme que cette veine tend à prendre en débouchant d'un orifice aminci, il est clair qu'il n'y aura plus de contraction à la sortie, puisqu'on aura artificiellement reporté ce qu'on appelle maintenant l'orifice à la section contractée. Il n'y aura plus de coefficient de contraction m répondant à une réduction de section, et l'on aura sensiblement pour la dépense $A\sqrt{2gh}$, ou plus exactement $\mu A\sqrt{2gh}$, μ portant sur la vitesse théorique et différant de l'unité. Les expériences de Michelotti ont donné

$$Q = 0{,}984\, A\sqrt{2gh}.$$

Quant aux dimensions les plus convenables à adopter pour

avoir un orifice qu'on puisse dire *parfaitement évasé*, elles ne sont pas très-bien déterminées. Michelotti a donné, pour les longueurs AB, *ab*, CD, les nombres respectifs 100, 79, 39, tandis qu'Eytelwein a donné les nombres plus simples 10, 8 et 5.

Ajutage rentrant de Borda. — Au lieu d'évaser la paroi, faisons-la rentrer au contraire dans l'intérieur du vase de manière à constituer un *ajutage rentrant*. Ce système d'orifice n'est jamais employé; son étude n'offre qu'un intérêt théorique résultant de ce qu'on peut déterminer la contraction par le calcul.

L'orifice étant disposé comme l'indique la *fig.* 92, la longueur AD du tube rentrant doit être telle que la veine liquide

Fig. 92.

se détache parfaitement des parois à partir de AB, et sorte sans toucher la paroi intérieure de l'ajutage. On voit qu'au moyen de ce petit tube on reporte dans l'intérieur du liquide des points où les molécules commencent à prendre des vitesses accélérées, de sorte que, l'orifice AB étant très-petit par rapport à la section horizontale du vase, la vitesse le long des parois verticales de celui-ci est très-faible même en D et en C, et la pression aux divers points de ces parois est partout celle qui aurait lieu dans l'état de repos. Donc la pression qu'exerce sur le liquide la paroi ED, CF qui entoure l'orifice étant projetée sur un axe perpendiculaire au plan vertical AB, est partout la même que celle des parties correspondantes GH, IK de la paroi opposée GK. De plus, celle-ci exerce en HI une pression qui n'est pas contre-balancée et dont l'expression est $F = \Pi AR$ (en désignant par A l'aire de l'orifice AB), si l'on

néglige la pression atmosphérique, qui agit également sur la veine $AabB$.

Cela posé, appliquons le théorème de la projection des quantités de mouvement au liquide qui, à un instant quelconque pris pour instant initial, est compris entre NN et ab, section faite à l'endroit de la contraction. Prenons l'axe de projection horizontal dans le sens de la vitesse de sortie en ab; celle-ci étant v et l'aire de la section contractée étant Ω, la masse du liquide dépensé pendant le temps dt est $\frac{\Pi\Omega v\,dt}{g}$, et sa quantité de mouvement $\frac{\Pi\Omega v^2\,dt}{g}$. C'est précisément l'accroissement de la projection de la quantité de mouvement du système matériel considéré, attendu la permanence du régime dans l'intérieur du vase et la direction verticale de la vitesse des molécules du plan NN. Quant aux impulsions horizontales des forces, elles se réduisent à $F\,dt$ ou $\Pi A h\,dt$, puisque toutes les autres forces se détruisent en projection. Le théorème de la quantité de mouvement donne donc l'équation

$$\frac{\Pi\Omega v^2\,dt}{g} = \Pi A h\,dt;$$

et comme on a d'ailleurs $v^2 = 2gh$, d'après le théorème de Bernoulli, qui s'applique indépendamment de l'orifice, on en conclut $\Omega = \frac{1}{2}A$, et la dépense par seconde $Q = \frac{1}{2}A\sqrt{2gh}$.

Ce dernier résultat est confirmé par une expérience de Borda. On voit que la démonstration précédente ne pourrait pas s'appliquer à un orifice ouvert immédiatement dans une paroi plane, parce que les filets, glissant sur cette paroi avec une vitesse croissante aux approches de l'orifice, y exercent une pression moindre que la pression hydrostatique. Il faudrait donc, dans ce cas, poser

$$F > \pi A h,$$

en continuant d'appeler F l'excès de la pression de la paroi GK sur la pression de la paroi opposée. On en conclurait

$$\Omega > \frac{1}{2}A \quad \text{et} \quad Q > \frac{1}{2}A\sqrt{2gh}.$$

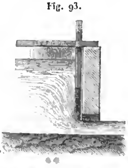
Diverses valeurs du coefficient de contraction. — Nous avons trouvé, pour le cas de l'orifice parfaitement évasé, que le coefficient de la dépense est égal à 0,98 : ce même coefficient est de 0,50 pour l'ajutage rentrant, et il est clair que, dans les diverses dispositions que l'on adoptera pour l'orifice, m variera entre 0,50 et 1, selon que la contraction se trouvera plus ou moins annulée, la vitesse étant toujours sensiblement égale à la vitesse théorique, à l'endroit de la contraction. En particulier, on augmenterait la dépense en disposant dans l'intérieur de l'orifice en mince paroi de petites planchettes, de manière à arrêter les filets dont les vitesses seraient trop divergentes; seulement il ne faudrait pas aller trop loin dans cette voie, car on arriverait à l'ajutage rentrant qui donne $m = 0,50$. On donne quelquefois une règle qui consiste à multiplier 0,62 par les coefficients 1,03, 1,05, 1,07 et 1,12, selon que la contraction sera supprimée sur un côté, sur deux côtés opposés, sur deux côtés contigus, enfin sur trois côtés.

On peut consulter les Tables déduites, par le colonel Lesbros, d'un très-grand nombre d'expériences (*Recueil des Mémoires des Savants étrangers*), ou l'extrait de ces Tables qu'on trouve à la fin du *Cours d'hydraulique* de M. Bresse.

Grands orifices. — Vannes. — L'écoulement des liquides par les grands orifices est le cas qui intéresse le plus la pratique, et dont l'étude présente la plus grande utilité.

Les eaux qui font mouvoir les roues hydrauliques sont or-

Fig. 93.

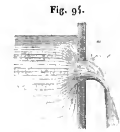


dinairement contenues dans un réservoir ou bief. L'une des parois de ce réservoir est percée d'un orifice dont les dimen-

sions ne peuvent pas être considérées comme petites. Quand la roue ne travaille pas, le pertuis est fermé par une *vanne*. Les vannes peuvent être d'ailleurs de deux sortes : des *vannes de fond* et des *vannes de superficie*. Les premières laissent passer l'eau en s'élevant (*fig.* 93), les autres en s'abaissant; ces dernières constituent ce que l'on appelle des *déversoirs;* nous les étudierons plus loin. Occupons-nous donc, pour le moment, des *vannes de fond*, c'est-à-dire étudions l'écoulement par un grand orifice noyé, lequel ne diffère que par les dimensions de ceux qui nous ont occupés jusqu'ici.

Remarquons d'abord que la théorie précédente n'est plus applicable. En effet, dans la section contractée, on a bien encore des molécules animées de vitesses parallèles, mais ces vitesses ne peuvent plus être considérées comme égales, et les paraboles suivies par les différents filets liquides doivent se gêner mutuellement (*fig.* 94).

Fig. 94.



Il n'est donc pas permis de décomposer l'orifice en une série d'orifices élémentaires de très-petite hauteur, à chacun desquels on appliquerait les résultats qui précèdent, et une théorie même approchée devient impossible. On emploie habituellement la formule des petits orifices

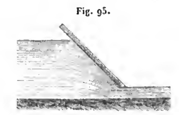
$$Q = mA\sqrt{2gh},$$

h étant la charge sur le centre, laquelle doit être égale au moins à trois fois la hauteur de l'orifice, et le coefficient m n'étant plus constant. Il peut varier de 0,600 à 0,605 pour les cas ordinaires de la pratique, dans lesquels la hauteur de l'orifice est à peu près de $0^m,20$, diminuant quand les charges augmen-

tent au delà d'une certaine limite, augmentant quand les dimensions de l'orifice diminuent.

Ce que nous venons de dire s'applique à un grand orifice percé en mince paroi à une assez grande distance du fond, de manière que la contraction soit complète. Mais, dans les vannes qui servent à donner l'eau à la plupart des moteurs, il n'en est pas ainsi. L'orifice est ordinairement formé par le seuil de la vanne, les deux côtés du canal, et enfin une paroi mobile qui est quelquefois verticale, mais le plus souvent inclinée (*fig.* 95), afin de pouvoir affleurer la roue de plus près. Il importe

Fig. 95.



porte d'ailleurs de donner la forme évasée à toutes les parties de la paroi qui en sont susceptibles, afin d'avoir la plus petite hauteur possible pour une dépense donnée. Dans ces conditions, la contraction étant supprimée sur trois côtés, et d'autant plus réduite pour le quatrième que l'inclinaison sera plus grande, on peut prendre

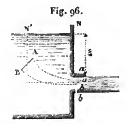
Pour une vanne verticale................	$m = 0{,}70$
Pour une vanne inclinée à 1 de base pour 2 de hauteur..........................	$m = 0{,}74$
Pour une vanne inclinée à 1 de base sur 1 de hauteur..........................	$m = 0{,}80$

Coursiers. — Souvent les vannes et autres orifices, évasés ou non, déversent dans un canal découvert ou *coursier*, dont le fond et les parois latérales affleurent le côté inférieur et les deux côtés latéraux de l'orifice. Les coursiers peuvent avoir 2 à 3 mètres de long, et, s'ils ont une inclinaison convenable que nous apprendrons à calculer, la veine conserve, à partir de la section *ab*, un mouvement rectiligne et uniforme.

Admettons d'ailleurs que la vitesse dans le bassin d'amont soit négligeable.

Considérons un filet $ABb'a'$ (*fig.* 96), en vertu de notre première règle, en désignant par p_a la pression atmosphérique en

Fig. 96.



a et en NN, et faisant $aa' = h'$, on a, pour la pression par unité de surface en $a'b'$, $p_a + \Pi h$, tandis que la pression en AB est $p_a + \Pi h_0$.

Le théorème de Bernoulli donne donc, pour la vitesse en $a'b'$, en négligeant celle qui a lieu en AB dans l'intérieur du vase,

$$\frac{v^2}{2g} = h + h_0 - h' = z \quad \text{ou} \quad v = \sqrt{2gz},$$

z étant la charge sur le *sommet a* de l'orifice (et non sur le *centre*).

On voit que ces coursiers diminuent la vitesse et, par suite, la dépense, en augmentant la pression intérieure, de sorte que la pression sur le centre de gravité se trouve remplacée par la charge sur le sommet qui est plus faible; cependant, dans ce cas, on peut encore employer la formule ordinaire

$$Q = mA\sqrt{2gh},$$

en désignant par h la charge sur le centre et m un coefficient expérimental. L'expérience prouve que, si la charge dépasse trois fois la hauteur de l'orifice, la dépense n'est pas sensiblement altérée; mais, au-dessous de cette limite, les coursiers diminuent cette dépense de plus en plus pour des charges de plus en plus faibles; on peut descendre à 0,42.

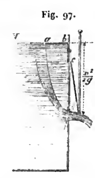
Nous avons étudié, d'une manière complète, le premier phénomène qu'on rencontre dans le mouvement des liquides sor-

tant d'un réservoir : c'est celui de la *contraction* qui se produit lorsque l'écoulement se fait par des orifices en mince paroi.

Dans ce cas, le théorème de D. Bernoulli est applicable, l'effet des frottements et autres résistances passives peut être négligé, parce que le liquide est simplement dirigé dans son mouvement sans agitation, sans tourbillonnements qui fassent perdre de la force vive.

Il suit de là que, depuis la surface libre jusqu'à la section contractée, il n'y a pas de *perte de charge.* La ligne des niveaux piézométriques qui, si nous ne tenons pas compte de la pression atmosphérique, a éprouvé une chute brusque de *b* en *c* (*fig.* 97) au moment de la sortie du vase, tombe jusqu'en *d*, à

Fig. 97.



l'endroit de la contraction; mais la différence des niveaux, au point *c* comme au point *d*, se retrouve tout entière en vitesse, et la *ligne de charge*, définie comme nous l'avons faite, reste sensiblement horizontale.

Des phénomènes d'un tout autre ordre vont se passer quand l'orifice est prolongé par un tuyau ou ajutage cylindrique, dont la longueur est égale à une fois et demie le diamètre au moins, et qui est mouillé par le liquide; il se produit alors le phénomène des *ajutages*.

§ IV. — Écoulement par un petit ajutage extérieur.

L'écoulement a lieu *en mince paroi* quand l'épaisseur de la paroi est assez faible, tout autour de l'ouverture, pour que la

veine fluide s'en détache complétement et ne fasse que toucher les arêtes intérieures de l'orifice (*fig.* 98). Il faut généra-

Fig. 98.



lement, pour cela, que l'épaisseur n'excède pas la plus petite dimension de l'orifice.

Dans le cas où l'on adapte au trou pratiqué dans la paroi un ajutage cylindrique dont la longueur est égale à une fois et demie le diamètre de l'orifice, au bout d'un certain temps l'écoulement se fait *à gueule-bée.* Il n'y a plus de contraction sensible; la section de la veine est égale à la section de l'orifice, les vitesses sont parallèles dès le point de sortie, et s'il était permis de négliger les actions moléculaires qui se passent dans l'intérieur de l'ajutage, on aurait

$$Q = A\sqrt{2gh}.$$

L'expérience prouve que l'on a

$$Q = 0,82\,A\sqrt{2gh}.$$

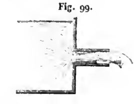
Or, la section de sortie étant égale à A, le coefficient 0,82 ne peut affecter que la vitesse; et, bien que la dépense soit plus grande que si l'ajutage n'existait pas, il y a perte de charge, parce qu'il y a une réduction de vitesse qui ne correspond pas à un relèvement piézométrique. Cette perte de charge indique une perte de force vive due au travail résistant des actions moléculaires du liquide.

Quand l'ajutage a une longueur plus petite que une fois et demie le diamètre, le phénomène est variable selon les circonstances, selon, par exemple, que l'orifice est graissé ou mouillé. Pour des dimensions plus grandes de l'ajutage, il se produit des frottements qui ne sont pas négligeables. C'est un troisième phénomène que nous étudierons dans le prochain

Chapitre. Pour le moment, nous allons étudier le phénomène des ajutages, dans le cas où les dimensions sont telles que ce phénomène se produise nettement et sans mélange d'aucune perturbation étrangère.

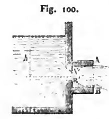
Du phénomène des ajutages. — Il n'y a plus de contraction, mais bien une réduction de vitesse, ou une perte de charge due au travail résistant des actions moléculaires mises en jeu. C'est ce qu'on vérifie par l'expérience, en mesurant directement la vitesse au moyen de l'amplitude du jet parabolique. Il est facile de se rendre compte de ce phénomène. Lorsque le liquide commence à s'écouler par l'ajutage, le phénomène de la contraction se produit, et la veine se forme d'abord bien détachée de la paroi du tuyau; mais il arrive que le courant entraîne en partie l'air qui l'entoure dans ce tuyau; l'air restant est dilaté et exerce une moindre pression sur la veine contractée : la vitesse de celle-ci s'accroît donc. Plus loin, la pression de l'atmosphère, qui subsiste à l'extérieur, ralentit la veine à la suite de la contraction; cette diminution de vitesse fait gonfler la veine jusqu'à ce qu'elle rejoigne le tuyau et qu'elle en suive la paroi (*fig.* 99). C'est ce brusque changement dans l'allure de la veine qui produit une certaine agitation, des mouvements plus ou moins irréguliers où se dépense inutilement la force vive. A partir du point où cela a lieu, le phénomène est complet. Au delà commence le mouvement dans les tuyaux par filets parallèles. L'air finit par être totalement expulsé, et il est remplacé par du liquide presque stagnant qui ne participe pour ainsi dire pas au mouvement. La veine contractée est alors entourée d'une portion de liquide à l'état de *remous*, c'est-à-dire tournoyant lentement en dehors du courant, phénomène analogue à celui qui a lieu dans les rivières à l'aval des piles des ponts.

Fig. 99.



Il résulte de là que, dans le petit intervalle qui sépare la section contractée de l'extrémité de l'ajutage, la vitesse du liquide doit changer d'une manière notable. Il se passe là quelque chose de plus ou moins analogue au choc des corps solides non élastiques; les actions moléculaires développent un travail résistant qui diminue la force vive, ce qui produit le même effet qu'une réduction de la charge génératrice de la vitesse. Pour trouver par le calcul la perte de force vive ainsi que la vitesse de sortie, nous allons supposer, plus généralement, qu'une veine fluide composée de filets parallèles, comme le jet qui s'échappe d'un orifice parfaitement évasé A'B' (*fig.* 100),

Fig. 100.



et possédant à cette section une vitesse v', soit brusquement obligée de s'élargir de manière à acquérir une nouvelle section AB, et à prendre, par suite, une nouvelle vitesse v plus petite que v' dans le rapport inverse des sections. Cherchons quels sont les phénomènes qui accompagneront ce brusque élargissement.

Effet d'un élargissement brusque d'une veine fluide. — Considérons donc un liquide sortant d'un réservoir par un orifice évasé et soumis à un gonflement subit. Soient p la pression atmosphérique, supposée la même au niveau de l'orifice qu'au niveau supérieur du liquide; p' la pression de l'eau dans la section A'B'.

Le théorème de D. Bernoulli est applicable depuis le niveau supérieur jusqu'à la section A'B'; donc on a

$$(1)\qquad \frac{v'^2}{2g} = h + \frac{p}{\Pi} - \frac{p'}{\Pi},$$

en négligeant la vitesse assez faible au niveau supérieur du réservoir.

Entre les deux sections A′B′ et AB, l'équation des forces vives, ou de D. Bernoulli, ne peut s'écrire sans qu'on y introduise un terme représentant le travail résistant développé dans cet intervalle par les actions moléculaires, ou la demi-force vive perdue qui est numériquement égale à ce travail.

En assimilant le phénomène au choc des corps solides non élastiques, on pourrait dire immédiatement, d'après le théorème de Carnot, que la force vive perdue est celle qui est due aux vitesses perdues, et, par conséquent, qu'il en résulte une perte de charge égale à la hauteur due à la différence de ces vitesses, soit

$$\frac{(v'-v)^2}{2g}.$$

Comme il pourrait rester quelque doute sur la légitimité de l'assimilation, nous allons retrouver ce résultat en employant le procédé dont nous avons déjà fait usage dans la théorie du choc, à l'effet d'éliminer les actions mutuelles inconnues. Nous allons donc appliquer, pour la partie du liquide comprise entre AB et A′B′, le théorème des quantités de mouvement projetées sur un axe horizontal. Si Ω désigne l'aire de A′B′, A l'aire de BA, la dépense en volume par seconde sera

$$Q = Av = \Omega v'.$$

La masse qui traversera chaque section sera

$$\frac{\Pi Q\,dt}{g},$$

et l'accroissement de quantité de mouvement sera, pris dans un sens convenable, et en ayant égard à la permanence, ce qui élimine tout le liquide intermédiaire,

$$\frac{\Pi Q\,dt}{g}(v - v').$$

En projection, les forces extérieures se réduisent aux pressions horizontales. La pression dont la direction est dans le sens positif est celle qui s'exerce sur Ω; elle est égale à $\Lambda p'$; car le liquide se compose à cet endroit de deux parties : l'une, animée d'un mouvement rectiligne uniforme, c'est la veine



proprement dite; l'autre, qui est le volume annulaire de liquide ambiant. Cette portion est animée de mouvements très-lents, et l'on peut admettre, dans les deux cas, que les pressions suivent les lois de l'Hydrostatique; sur la section AB, la pression est de même égale à Ap; donc on a

$$\frac{\Pi Q\,dt}{g}(v - v') = A(p' - p)\,dt,$$

ou, en remplaçant Q par Av et divisant par $A\Pi\,dt$,

$$(2)\qquad \frac{v(v - v')}{g} = \frac{p'}{\Pi} - \frac{p}{\Pi};$$

cette équation peut se mettre sous la forme suivante, qui met en évidence la perte de charge dont nous avons parlé,

$$(3)\qquad \frac{v^2}{2g} - \frac{v'^2}{2g} = \frac{p'}{\Pi} - \frac{p}{\Pi} - \frac{(v' - v)^2}{2g};$$

et ajoutant cette équation avec la première, on a

$$(4)\qquad \frac{v^2}{2g} = h - \frac{(v' - v)^2}{2g}.$$

Donc on peut appliquer le théorème de Bernoulli depuis la surface libre jusqu'à l'orifice, à la condition de diminuer la charge de $\frac{(v' - v)^2}{2g}$. Cette quantité est l'expression de la perte de charge due à un renflement.

Application au cas de l'ajutage cylindrique. — Pour appliquer ce résultat au cas de l'ajutage cylindrique, on peut admettre que la section Ω n'est autre que la section contractée qui répond à l'orifice A. Nous aurons alors, en supposant que la contraction dans l'eau à l'état de remous soit la même que dans l'air, ce qu'il est naturel d'admettre, puisque la contraction est un effet de la convergence des filets affluents et ne dépend pas sensiblement de la pression,

$$\Omega = mA,$$

d'où

$$v' = \frac{v}{m},\quad v^2\left[1 + \left(\frac{1}{m} - 1\right)^2\right] = 2gh,\quad \mu = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{m} - 1\right)^2}}.$$

En prenant $m = 0{,}62$, on trouve

$$v = 0{,}85\sqrt{2gh}.$$

L'expérience ne donne que 0,82 au lieu de 0,85. Cette petite différence peut s'expliquer par l'influence des frottements du vase, et aussi par quelque inégalité de vitesse dans les filets de la veine à son passage en AB.

Dépression piézométrique à l'endroit de la contraction. — Il est extrêmement important, pour des calculs fondés sur des bases aussi hypothétiques, de faire une autre vérification expérimentale de cette théorie. Si elle est exacte, la pression, dans l'intérieur de l'ajutage, doit être plus petite que la pression atmosphérique. La différence $\frac{p}{\Pi} - \frac{p'}{\Pi}$ est donnée par l'une quelconque des équations (1), (2) ou (3), en y introduisant les valeurs de v et de v'; si nous adoptons pour v la valeur pratique $0{,}82\sqrt{2gh}$, on trouve

$$\frac{p}{\Pi} - \frac{p'}{\Pi} = 0{,}75\,h. \tag{5}$$

Expérience de Venturi. — L'expérience que vérifie ce résultat a été faite par Venturi. Il prit un vase (*fig.* 101) muni

Fig. 101.



d'un ajutage cylindrique de $0^m{,}0406$ de diamètre et de $0^m{,}122$ de longueur. En un point situé à $0^m{,}108$ de son origine, il

adapta un tube de verre recourbé dont l'autre extrémité plongeait dans un vase contenant de l'eau colorée. La charge h du bassin supérieur sur l'axe de l'ajutage étant de $0^{m},88$, l'eau aspirée s'est élevée dans le tube de verre à une hauteur de $0^{m},55$, c'est-à-dire, à très-peu près, aux trois quarts de h, comme l'indique la théorie.

C'est donc un fait parfaitement acquis à la théorie que, toutes les fois qu'une veine liquide débouche dans un espace fermé, il y a aux environs de la section contractée une pression plus faible que la pression atmosphérique. La double démonstration analytique et expérimentale que nous venons de donner ne peut laisser aucun doute sur ce théorème important, qui s'applique également aux gaz et aux vapeurs.

Il résulte de là que si, à l'endroit qui correspond à la place du tube de Venturi, nous perçons de petits trous, il y aura par ces trous appel d'air au dehors et au dedans : c'est le principe de la machine soufflante connue sous le nom de *trompe*.

De plus, si, vers la partie inférieure du tube, nous perçons un trou suffisamment petit au-dessous du niveau du liquide soulevé, nous aurons par ce trou un écoulement continu, de sorte que l'appareil de démonstration représenté par la figure peut servir théoriquement de machine à élever l'eau.

Un jet d'air ou de vapeur présente des phénomènes du même genre, seulement beaucoup plus compliqués, surtout quand il s'agit de la vapeur, à cause de la compressibilité des fluides élastiques, des condensations de vapeur qui peuvent se produire, et enfin des transformations de chaleur en travail mécanique dont nous exposerons plus tard la théorie.

L'injecteur Giffard est une des applications les plus extraordinaires de ces phénomènes.

Calcul de la perte de charge. — Si l'on élève au carré l'équation

$$v = 0,82\sqrt{2gh}$$

et qu'on la résolve par rapport à h, on trouve

$$h = 1,49\frac{v^2}{2g}.$$

Donc, pour produire une vitesse v à l'extrémité d'un aju-

tage cylindrique, il faut à peu près une fois et demie la hauteur qui produirait cette vitesse en mince paroi. La perte de charge est donc le tiers de la hauteur; et, malgré cela, la dépense est augmentée dans le rapport de 0,82 à 0,62.

Bien que, pour les applications ordinaires, les formules

$$Q = 0,62\,A\,\sqrt{2gh}$$

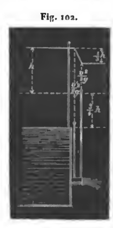
et

$$Q = 0,82\,A\,\sqrt{2gh}$$

se traitent absolument de la même manière, il importe de remarquer que les deux coefficients n'ont pas la même signification théorique; le premier affecte la section, le second la vitesse. Nous les représenterons par m et μ.

La *fig.* 102 met en évidence les variations corrélatives de la ligne de charge et de celle des niveaux piézométriques. Ces

Fig. 102.



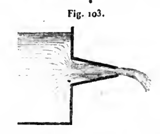
deux lignes suivent des marches toujours indépendantes, quelquefois parallèles, souvent inverses, comme dans le cas actuel. Seulement la ligne de charge ne peut qu'aller en descendant; l'autre peut osciller dans des limites plus ou moins étendues.

Ajutages coniques. — Les ajutages cylindriques peuvent être remplacés par des ajutages coniques. S'ils sont divergents, ils produisent, tant qu'ils sont mouillés par le liquide, le phéno-

mène des ajutages cylindriques exagéré. La perte de charge sera plus grande, parce que la différence des vitesses à l'entrée de l'ajutage et à la sortie est plus grande.

Si les ajutages sont convergents, le phénomène est double (*fig.* 103). Il y a à la fois réduction de vitesse due au gonflement de la veine et contraction extérieure due à la convergence

Fig. 103.



des filets, et, par suite, la dépense est affectée d'un coefficient qui représente à la fois ces deux actions, et qui est égal au produit de ceux qui résulteraient de chacune de ces actions prises séparément. En supposant que l'angle du cône varie de 0 à 180 degrés, nous arriverons des ajutages cylindriques à l'orifice en mince paroi, en passant par un orifice très-voisin de l'évasement complet. Les expériences ont été faites sur des ajutages ayant pour diamètre commun, à leur petite base, $0^m,0155$, avec une longueur égale à deux fois et demie ce diamètre, et sous des charges de $0^m,20$ à 3 mètres. On mesurait directement la dépense, ce qui donnait le produit $m\mu$ des deux coefficients de réduction ; les coordonnées de la parabole décrite par le filet liquide permettaient de trouver μ, coefficient de réduction de la vitesse, et enfin, par une division, on avait le coefficient m dû à la contraction. On a trouvé les nombres suivants :

Angle du cône.	m Coefficient de contraction.	μ Coefficient de la vitesse.	μm Coefficient de la dépense.
0°. 0′	1,00	0,82	0,82
12. 4	0,99	0,955	0,942
29.58	0,92	0,975	0,895
48.50	0,86	0,984	0,847
180. 0	0,62	1,00	0,62

Remarques sur ce tableau. — On voit que, tant que l'angle du cône ne dépasse pas 12 à 15 degrés, la convergence à la sortie est insignifiante, et le coefficient m très-voisin de l'unité.

Au contraire, le coefficient μ, qui représente la perte de force vive, diminue à mesure que l'angle augmente, parce que l'épanouissement de la veine après la contraction intérieure est plus faible.

Des effets combinés de ces deux causes qui agissent en sens inverse, il résulte que le maximum de dépense correspond à l'angle de 12°4'.

Buses. — Quand la longueur de la buse conique augmente, il se produit des frottements qui croissent avec la longueur; mais on observe aussi un autre phénomène remarquable : v', au lieu d'être plus grand que v, est notablement plus petit, à cause de la convergence du cône; l'expérience de Venturi donnerait un refoulement au lieu d'une aspiration; d'un autre côté, cette même convergence fait que l'épanouissement de la veine est moins considérable au sortir de la section contractée; donc, pour ces deux raisons, la perte de charge $\frac{(v'-v'')^2}{2g}$ est assez faible.

Quant à la contraction à la sortie, le tableau montre qu'elle est négligeable, lorsque la convergence du cône ne dépasse pas 12 à 15 degrés : on peut, dans ces conditions, et malgré l'influence du frottement, arriver à des coefficients de 0,98 à 0,99.

§ V. — Écoulement par déversoirs.

On appelle *déversoir* une échancrure rectangulaire pratiquée dans la paroi d'un vase, échancrure par laquelle s'écoule l'eau, que nous supposerons maintenue dans le vase à un niveau constant. On appelle *seuil* du déversoir l'arête inférieure pardessus laquelle l'eau se déverse en nappe.

Souvent les déversoirs sont en maçonnerie, souvent aussi ils sont constitués par une vanne de superficie qu'on soulève quand on veut empêcher l'eau de sortir, et qu'on abaisse quand on veut la faire écouler. L'arête supérieure de cette vanne constitue alors le seuil du déversoir.

L'écoulement par un orifice de ce genre ne diffère pas de l'écoulement par un grand orifice rectangulaire pour lequel la charge sur l'arête supérieure serait nulle. La théorie des grands orifices n'ayant pu être faite, celle des déversoirs n'est guère plus possible, au moins d'une manière satisfaisante. On est donc obligé de tout demander à l'expérience.

On admet, pour la dépense, la formule de Dubuat,

$$Q = K l h \sqrt{2gh} \;(^*),$$

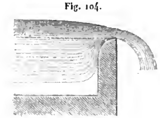
dans laquelle h est la charge sur le seuil, l la largeur du déversoir, par suite lh la section d'écoulement. Le facteur $\sqrt{2gh}$ représente à peu près la vitesse moyenne ; enfin K est un coefficient que l'expérience doit déterminer.

Ce qui distingue ces formules de celles que donne la théorie, c'est que K n'est pas constant, même approximativement : il varie avec la charge, la largeur absolue du déversoir et le rapport de cette largeur à celle du canal.

Enfin il varie considérablement, suivant que la contraction est plus ou moins supprimée.

Il faut bien se garder de mesurer h en plongeant un mètre dans l'eau au-dessus du seuil, et mesurant la hauteur du liquide : il y a toujours en ce point une dénivellation (*fig.* 104)

Fig. 104.



qui peut atteindre, selon les cas, 15 à 20 pour 100 de la charge réelle. Il est alors indispensable de comparer par un nivellement le seuil du déversoir avec un point du niveau liquide

(*) Si l'eau était animée dans le réservoir d'une vitesse notable v_0, il faudrait écrire

$$Q = K l h \sqrt{2gh + v_0^2}.$$

assez éloigné pour que l'appel produit par le déversoir y soit insensible.

On doit éviter avec soin, dans la construction d'un déversoir, la contraction latérale (*fig.* 105) et la contraction inférieure;

Fig. 105.





on peut ainsi dépenser plus d'eau avec une charge donnée. La contraction latérale est naturellement évitée, quand le déversoir occupe toute la largeur du canal.

Dans ces conditions, si la charge dépasse $0^m,03$, limite au-dessous de laquelle la permanence est difficile à atteindre et la valeur de h incertaine; si, de plus, la largeur l est assez grande, relativement à la charge, on peut admettre, avec M. Castel,

$$K = 0,443 \quad \text{ou} \quad Q = 1,96\, lh\sqrt{h}.$$

Telle est la formule qu'on pourra employer pour un avant-projet. S'il s'agit d'estimer la dépense d'un déversoir établi, il faut chercher, dans les Recueils d'expériences, les nombres qui se rapprochent le plus des conditions de la question.

Des expériences faites d'abord par MM. Poncelet et Lesbros en 1827, et continuées depuis par ce dernier, sur un orifice en forme de déversoir dont la largeur était de $0^m,20$, tantôt avec contraction latérale, tantôt sans cette contraction, ont donné des résultats dont nous extrayons ce qui suit :

VALEURS DE Z.	VALEURS DE K avec contraction latérale.	VALEURS DE K sans contraction latérale.
m	m	m
0,01	0,424	0,492
0,02	0,417	0,473
0,03	0,412	0,459
0,04	0,407	0,449
0,06	0,401	0,442
0,08	0,397	0,434
0,10	0,395	0,434
0,14	0,393	0,434
0,20	0,390	0,432
0,22	0,385	0,430

Les derniers coefficients sont ceux qu'il paraît convenable d'adopter lorsque le déversoir a une grande étendue relativement à la charge Z, qui doit d'ailleurs excéder $0^m,03$, à cause surtout de la difficulté de mesurer exactement une charge moindre.

M. Clarinval, capitaine d'artillerie, a donné la formule suivante, qui contient un élément de plus que celle de Dubuat, l'épaisseur *e* de la veine, prise directement sur le seuil :

$$Q = lhe\sqrt{\frac{g}{h+e}}.$$

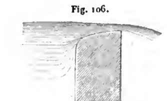
Ces formules sont très-importantes, parce que les déversoirs existent réglementairement dans toutes les usines hydrauliques; ils fournissent un moyen de jaugeage fréquemment employé pour calculer le volume fourni par un cours d'eau (*).

Déversoirs larges. — Lorsque le déversoir est accompagné d'un coursier plus ou moins incliné et d'une petite longueur (*fig.* 106), il y a réduction de la dépense lorsque la charge est au-dessous de 25 à 30 centimètres. Pour des charges

(*) Consulter à ce sujet le *Mémoire sur le jaugeage des cours d'eau* et le *Traité de la mesure des eaux courantes*, par M. Boileau.

de plus en plus fortes, la réduction devient de moins en moins sensible; mais, pour les charges de quelques centimètres, la

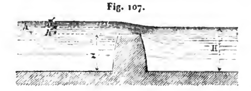
Fig. 106.



réduction est considérable. (*Voir* les *Recueils* du général Morin.)

Déversoirs incomplets ou *demi-déversoirs*. — Un déversoir est dit *incomplet* quand le niveau de l'eau dans le bief d'aval se tient au-dessus du seuil (*fig.* 107). On mène alors un plan

Fig. 107.



horizontal qui prolonge le niveau inférieur et divise la hauteur h en deux parties h' et h''. On considère l'écoulement comme se faisant à la fois par un déversoir dont la charge sur le seuil est h' et par un orifice noyé de hauteur h'', avec une charge supérieure égale à h' : la dépense du déversoir incomplet sera la somme de ces deux dépenses partielles; on la représente par la formule

$$Q = 2{,}66\, l\left(h - \tfrac{1}{3}h'\right)\sqrt{h'}.$$

Problèmes sur les barrages. — Ces déversoirs incomplets donnent lieu à des problèmes de la plus haute importance, mais que souvent on ne peut pas résoudre d'une manière satisfaisante, même pour les besoins de la pratique; et c'est là ce qui montre combien il reste encore à faire pour l'Hydraulique, malgré tant de progrès récents que cette science a faits entre les mains d'expérimentateurs habiles.

On peut demander, par exemple, connaissant la profondeur H et le débit Q d'un cours d'eau régulier, à quelle hauteur Z il faudra établir un barrage pour créer une chute de hauteur h'. Il est clair que l'établissement du barrage ne changera pas le niveau de l'eau dans le bief d'aval, puisque le lit et le débit n'auront pas changé dans cette partie, au moins une fois le régime redevenu permanent.

Ceci une fois admis, la formule des déversoirs incomplets permet de résoudre immédiatement le problème. Il suffit de remplacer, dans la formule, h par $h' + H - z$, h'' par $H - z$, et l'on en tirera la valeur de z en fonction des données H, Q et de la chute h' qu'on veut produire.

La même équation, dans laquelle on considérera z comme une donnée et h' comme l'inconnue, donnera la hauteur à laquelle un barrage donné fera relever les eaux immédiatement en amont.

On peut demander aussi de chercher jusqu'à quelle distance le remous, ou gonflement produit par le barrage, sera sensible dans le bief d'amont (*fig.* 108).

Fig. 108.



Cette question a une grande importance pratique au point de vue de la dépréciation des propriétés riveraines d'un cours d'eau qu'on veut barrer dans un intérêt public ou particulier. Elle est extrêmement difficile dans l'état actuel de l'Hydraulique, et n'entre pas dans notre programme.

Généralement la surface modifiée se raccorde asymptotiquement avec le plan primitif; mais il peut arriver dans certains cas que le raccordement soit impossible : il se passe alors des phénomènes dont nous dirons quelques mots plus tard.

CHAPITRE III.

DU FROTTEMENT ET DE LA VISCOSITÉ DES LIQUIDES.

On n'a pas tardé à reconnaître que, si l'on pouvait négliger le frottement dans le cas d'un liquide en équilibre ou d'une veine qui ne se trouve que sur une petite longueur en contact avec des parois solides, il n'en était pas de même dès que l'on considère un cours d'eau d'une grande étendue comme une rivière, ou même un liquide s'écoulant d'un réservoir par l'intermédiaire d'un tuyau d'une certaine longueur.

Mouvement uniforme. — Nous restreignons notre étude au cas d'un mouvement permanent, et si d'abord nous supposons en outre que les dimensions du lit ou la section de la conduite soient constantes, il est clair que le mouvement ne saurait être permanent sans être en même temps uniforme. En effet, la permanence donne

$$v\omega = v'\omega' = v''\omega'', \ldots;$$

si $\omega = \omega' = \omega''$, on a

$$v = v' = v'' \ldots.$$

Or l'observation journalière démontre que ce mouvement uniforme s'établit en effet, malgré l'inclinaison du lit ou de la conduite, preuve de l'existence d'un *frottement*, c'est-à-dire d'une résistance tangentielle opposée au mouvement.

De plus, le mouvement devient toujours nécessairement uniforme, quelle que soit la pente, c'est-à-dire quelle que soit la composante motrice de la pesanteur. Donc, la vitesse de ce mouvement uniforme étant d'ailleurs d'autant plus



grande que la pente est plus forte, il faut que le frottement grandisse avec la vitesse, de manière à faire constamment équilibre à la force motrice croissante.

Enfin on reconnaît encore aisément qu'une conduite partant d'un réservoir fixe pour aboutir à un niveau donné débite d'autant moins d'eau qu'elle est plus longue, ce qui montre l'influence sur le frottement de l'étendue de la surface suivant laquelle le liquide est en contact avec des parois solides.

Ces principes, qui semblent très-simples, n'ont pas été posés dès le début, et Dubuat se glorifie à juste titre d'avoir découvert que, *quand l'eau coule uniformément dans un lit quelconque, la force accélératrice qui l'oblige à couler* est égale *à la somme des résistances qu'elle essuie, soit par sa propre viscosité, soit par le frottement du lit.* Les remarques précédentes sont des conséquences immédiates de ce théorème évident.

Pour aller plus loin et déterminer exactement la vitesse et par conséquent la dépense d'un courant dont la pente et le lit sont donnés (question sans la solution de laquelle il est impossible de prévoir le résultat d'aucune opération sur le lit des fleuves) des expériences précises et nombreuses étaient indispensables : elles furent exécutées avec un rare esprit de discernement par Dubuat (1780-1783). Les expériences antérieures de Bossut et Couplet sur les tuyaux de conduite et les canaux factices ne formaient pas un ensemble suffisant pour constituer une théorie.

De Prony s'est servi des expériences de Dubuat pour établir des formules qui ont été longtemps en usage. Enfin des expériences plus précises ont été faites récemment par Darcy, qui a pu mettre en évidence de nouvelles influences, et arriver à donner plus d'exactitude aux formules destinées à traduire les résultats pour les besoins de la pratique de l'ingénieur.

Conformément à l'usage habituel, nous diviserons l'étude théorique et expérimentale du frottement des liquides en deux parties consacrées, la première à l'étude du mouvement permanent des liquides dans des tuyaux fermés, la seconde à celle des phénomènes qui se passent quand le mouvement a lieu dans un lit ou canal découvert.

§ VI. — Théorie des conduites cylindriques a débit constant.

Étude physique. — Commençons par faire une étude physique du phénomène, afin de chercher à quoi peut tenir l'existence du frottement dans le mouvement des liquides. Nous voyons tout de suite qu'il y a lieu d'établir une distinction radicale entre le frottement des liquides et celui des solides.

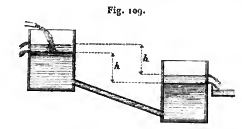
La cause qui produit tout ce qu'on remarque dans le frottement entre les solides, pression et déformation mutuelles des corps en contact, paraît perdre beaucoup de son importance quand il s'agit des liquides, à cause de leur incompressibilité presque complète. Il faut donc une autre explication pour le phénomène actuel. Or il est naturel de la chercher dans ce fait que les tuyaux qui contiennent le liquide en mouvement ne sont pas parfaitement polis. Ils ont leur intérieur hérissé de petites aspérités qui retardent presque jusqu'à l'immobilité la couche liquide qui se trouve directement en contact. Celle-ci, en vertu de la viscosité, retarde à son tour la couche qu'elle enveloppe, et ainsi de suite jusqu'au centre, où le retard est minimum. Telle est la cause probable de la réaction longitudinale qu'exercent les parois encaissantes sur un liquide en mouvement.

Occupons-nous donc de chercher suivant quelle loi varie cette résistance longitudinale des tuyaux de conduite, résistance qui provient à la fois de l'effet de la réaction directe des tuyaux et de la viscosité du liquide.

1° *Influence de la pression.* — L'incompressibilité des liquides fait pressentir que leur frottement est indépendant de la pression. C'est là une des lois qu'on a le plus difficilement admises dans le principe, tant ce résultat était contraire aux idées préconçues provenant d'une assimilation peu justifiable avec le frottement des solides. Voici l'expérience par laquelle Dubuat a dûment établi ce fait capital dans la théorie actuelle. Il a pris deux vases assez grands, dans chacun desquels le niveau était maintenu à une hauteur fixe pour chaque expérience. Les réservoirs étaient réunis par un tuyau de con-

duite, et l'on mesurait par le trop-plein du vase inférieur la quantité d'eau débitée par la conduite venant du vase supérieur (*fig.* 109). Il augmentait ensuite de $0^m,25$ la charge de

Fig. 109.



ce dernier, en laissant la différence de niveau constante, et ne trouva aucun changement dans la dépense. Darcy a confirmé ce résultat en faisant varier les pressions absolues entre des limites beaucoup plus écartées que celles auxquelles s'était arrêté Dubuat.

2° *Influence de la nature des parois.* — Pour un liquide qui mouille la paroi, le frottement s'exerce sur une couche mince adhérente à la paroi : il est donc à peu près indépendant de la nature de celle-ci, pourvu qu'elle ne présente pas de rugosités sensibles. Mais les expériences nouvelles de Darcy et de M. Bazin ont fait reconnaître l'inexactitude de cette loi de Dubuat.

3° *Influence de l'étendue de la surface de contact.* — Les molécules liquides étant à peu près indépendantes les unes des autres, la résistance s'exerce sur chaque élément; elle est donc proportionnelle à l'étendue des surfaces en contact, ou à χl, en appelant χ le périmètre de la section mouillée, et l la longueur du tuyau.

4° *Influence de la vitesse.* — La résistance augmente avec la vitesse; il s'agit de trouver suivant quelle loi a lieu cette variation. Il est très-difficile de prévoir cette loi directement, car on ne sait pas comment la vitesse varie pour les différents filets liquides; tout ce qu'on peut mesurer, c'est la *vitesse moyenne*, c'est-à-dire le quotient de la dépense par la section. Or il n'est pas étonnant que nous ne puissions trouver une loi simple en fonction d'une variable qui n'est point celle qui

influe directement sur le phénomène. Quoi qu'il en soit, appelons U cette vitesse moyenne. Il est naturel de supposer que les résistances croissent à peu près comme les carrés des vitesses. En effet, la vitesse agit doublement : elle influe d'abord sur le nombre des molécules liquides mises en contact avec la paroi, et ensuite sur la résistance qu'opposent les aspérités de la paroi aux diverses molécules liquides qui glissent à sa surface. Cependant l'expérience prouve que la résistance d'un même lit croît en moindre raison que le carré de la vitesse : ces deux variables ne sont donc pas liées par une loi simple, et l'on est obligé d'employer une formule empirique (*).

Nous nous abstiendrons de mentionner la formule proposée par Dubuat, laquelle n'a jamais été employée. De Prony a calculé une formule parabolique à deux termes, qui a été longtemps la seule en usage. D'après lui, la résistance longitudinale d'une longueur l de tuyau est donnée par la fonction

$$F = \chi l(\alpha U + \beta U^2),$$

(*) *Sur les formules empiriques.* — Laissant constants tous les autres éléments, on fera varier la dépense du tuyau, c'est-à-dire la vitesse U, et l'on observera les pertes de charge correspondantes. On construira une courbe ayant ces pertes pour ordonnées, et les vitesses U pour abscisses.

Si la théorie et les expériences sont bien faites, c'est-à-dire si l'on a bien éliminé toutes les causes qui peuvent troubler le phénomène, cette courbe devra avoir une forme assez régulière. Si quelques résultats d'expériences paraissent en dehors de la marche générale de la courbe, il y a beaucoup de chances pour qu'ils soient inexacts, et l'on devra recommencer les expériences correspondantes. Un seul résultat anormal qui serait bien confirmé serait la condamnation de la théorie.

La courbe étant construite, en corrigeant légèrement les expériences d'après la notion de la continuité, on cherchera parmi les courbes que l'on connaît celle dont la forme se rapproche le plus de celle qui y est tracée, et l'on en déterminera l'équation, en se guidant d'après les considérations suivantes :

1° Si la courbe se rapproche beaucoup de la ligne droite, de sorte que les deux ordonnées ne diffèrent que de quantités qui soient de l'ordre possible des erreurs d'expériences, la fonction croîtra proportionnellement à la variable, et l'équation exprimant la relation cherchée sera

$$y = ax + b.$$

2° Si la fonction croît dans une proportion plus rapide, on cherchera s'il y a proportionnalité au carré, au cube, ou à une puissance fractionnaire de

dans laquelle α et β sont indépendants de la nature et des dimensions du tuyau.

La perte de charge correspondante, pour une surface pressée égale à Ω, est

$$Y = \frac{F}{\Pi \Omega},$$

soit, par mètre de longueur de tuyau,

$$J = \frac{\chi}{\Omega} (a U + b U^2),$$

en désignant par J le quotient $\frac{Y}{l}$, suivant l'usage habituel, et

---

la variable. Dans les cas plus compliqués, on aura recours à une *fonction parabolique*

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots,$$

en prenant d'autant plus de termes qu'on voudra une approximation plus considérable.

Si la fonction croît moins vite que la variable, on prendra des radicaux.

3° Quand la fonction croît plus rapidement que toutes les puissances de la variable, on prend des exponentielles de la forme

$$a e^{\alpha x} + b e^{\beta x} + \ldots.$$

4° Quand la fonction décroît, on prend les inverses des expressions précédentes

$$\frac{1}{x}, \quad \frac{1}{x^2}, \quad \frac{1}{a^x}.$$

5° Enfin les fonctions trigonométriques conviennent au cas où la fonction est périodique.

On a ainsi l'équation qui exprime la loi cherchée; elle renferme plusieurs coefficients ou paramètres qu'il faut déterminer par l'expérience : or on remarque que chaque observation donne une relation entre ces coefficients; le nombre d'observations doit donc être au moins égal au nombre d'inconnues à déterminer, et, en général, il est utile de les multiplier bien au delà, sauf à choisir dans le nombre les plus exactes et celles qui sont le plus distantes l'une de l'autre; on peut aussi employer la méthode des moindres carrés, qui tient compte de toutes les observations, mais qui est bien rarement recommandable dans les questions de pratique industrielle; ou bien encore une construction graphique quand on peut en trouver une suffisamment simple, comme nous allons le voir. Enfin une remarque d'importance capitale, c'est de n'employer jamais une formule empirique que *dans les limites où elle a été établie par l'expérience.*

faisant

$$\frac{\alpha}{H} = a, \quad \frac{\beta}{H} = b.$$

Si D est le diamètre du tuyau, on a

$$\Omega = \frac{\pi D^2}{4}, \quad \chi = \pi D,$$

d'où

$$\frac{1}{4} DJ = aU + bU^2$$

Telle est la formule usuelle.

Pour déterminer les coefficients a et b, Prony a mis à profit cinquante et une expériences diverses qui avaient été faites par Bossut, Couplet et Dubuat. Après avoir mis l'équation précédente sous la forme

$$\frac{1}{4} D \frac{J}{U} = a + bU,$$

il a construit une courbe, en prenant pour ordonnées les valeurs de $\frac{1}{4} D \frac{J}{U}$, et pour abscisses les vitesses U. La courbe ainsi obtenue s'écartait assez peu d'une ligne droite, dont il a mesuré l'ordonnée à l'origine a et le coefficient angulaire b. Il a trouvé ainsi

$$a = 0,0000173,$$
$$b = 0,000348.$$

Eytelwein et d'Aubuisson ont repris la discussion des mêmes expériences, et ont proposé pour les coefficients, le premier, les valeurs

$$a = 0,0000222,$$
$$b = 0,000280;$$

le second,

$$a = 0,0000188,$$
$$b = 0,000343.$$

Ces divergences tiennent à ce que l'on peut tracer plusieurs droites qui ne s'écartent pas plus sensiblement l'une que l'autre de l'ensemble des points déterminés expérimentale-

ment. En général, il faut que les écarts soient peu considérables et qu'ils soient dans tous les sens pour que la théorie et les expériences soient admissibles.

Si les écarts sont faibles, mais suivent une loi régulière, cela prouve qu'on a négligé une cause d'erreur constante : la théorie ne représente pas exactement le phénomène; elle peut d'ailleurs être suffisante pour les besoins de la pratique.

Formules diverses. — Dupuit a remarqué que, si U n'est pas très-petit, le terme aU devient négligeable devant bU^2. Il faut alors changer la valeur de b et prendre

$$b_1 = 0{,}0003855,$$

en exagérant un peu l'effet des frottements. On met ainsi la formule sous la forme

$$J = \left(\frac{Q}{20}\right)^2 \left(\frac{1}{D}\right)^5 = 0{,}0025\,\frac{Q^2}{D^5}.$$

M. Barré de Saint-Venant, en se servant toujours des mêmes expériences, a proposé de remplacer le binôme par un seul terme AU^m, dans lequel m est fractionnaire et égal à $\frac{12}{7}$, et $A = 0{,}00029557$.

La détermination des coefficients A et m peut se ramener aussi à la construction d'une ligne droite. Il suffit pour cela de prendre pour abscisses les logarithmes des vitesses log U, et pour ordonnées log J; on a, en effet, entre ces variables l'équation linéaire

$$\log J = \log A + m \log U.$$

Expériences de Darcy. — Depuis assez longtemps, divers ingénieurs avaient constaté que la formule de Prony était loin d'avoir toujours l'exactitude désirable. Darcy, Inspecteur général des Ponts et Chaussées, a repris cette question, et fait exécuter un grand nombre d'expériences dont les détails se trouvent consignés dans son Ouvrage, intitulé : *Recherches expérimentales relatives au mouvement de l'eau dans les tuyaux* (1857).

Darcy a opéré sur vingt-deux tuyaux différents par leur nature (fer étiré, plomb, tôle et bitume, verre, fonte, tantôt neuve, tantôt recouverte de dépôts), et par leurs diamètres,

depuis $0^m,0122$ jusqu'à $0^m,50$; et il a fait sur eux cent quatre-vingt-dix-huit expériences. En faisant varier dans un même tuyau la vitesse et par conséquent la perte de charge par mètre, il a trouvé qu'en général celle-ci est, pour chaque tuyau, à peu près proportionnelle à une fonction du second degré $aU + bU^2$ de la vitesse moyenne; il a également reconnu que, comme l'avait remarqué Prony, lorsque la vitesse n'est pas trop petite, c'est-à-dire qu'elle est supérieure à $0^m,10$, on peut négliger le terme du premier degré; mais, contrairement à l'opinion de Dubuat, Darcy a constaté que les coefficients a et b, constants pour un même tuyau, varient avec le diamètre et avec la nature de la conduite. La résistance de la fonte neuve serait environ une fois et demie celle du bitume. Une fois les dépôts formés, la nature de la surface recouverte perd naturellement son influence; mais la résistance est alors double de celle de la fonte neuve.

Quand il s'agit de tuyaux dont la surface est altérée par de légers dépôts ou par l'oxydation, si la vitesse n'est pas inférieure à $0^m,10$ par seconde, la formule adoptée par Darcy revient à la suivante, où nous conservons le même premier membre que dans celle de Prony:

$$\frac{1}{4}DJ = \left(0,000507 + \frac{0,000013}{D}\right) U^2,$$

tandis que, pour une conduite en fonte à paroi lisse, il faudrait réduire le second membre *à moitié*, ou, ce qui revient au même, en désignant le rayon par r, poser, comme le fait M. Darcy,

$$rJ = \left(0,000507 + \frac{0,00000647}{r}\right) U^2.$$

Lorsque, dans une conduite à surface lisse en fonte, on veut comprendre le cas où la vitesse serait moindre que $0^m,10$ par seconde, la formule qu'indique Darcy revient à celle-ci (chaque nombre étant réduit à trois chiffres significatifs):

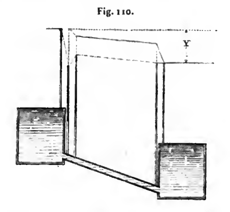
$$rJ = aU + bU^2,$$

en y faisant

$$a = 0,0000316 + \frac{0,0000376}{(100r)^2}, \quad b = 0,000443 + \frac{0,00062}{100r}.$$

Problèmes relatifs aux conduites. — Voyons maintenant comment nous appliquerons ces résultats aux différents problèmes relatifs à une conduite d'eau (*fig.* 110). Ces problèmes

Fig. 110.



sont de deux natures. On peut demander de calculer le débit d'une conduite dont on donne les dimensions et la pente, ou de calculer le diamètre d'un tuyau de conduite de longueur et de pente données, pour qu'il débite une quantité d'eau donnée.

Supposons qu'on ait une conduite simple mettant en communication deux réservoirs. La différence de niveau Y est la somme de la perte de charge due au phénomène des ajutages qui se produit à l'entrée du tuyau, de celle due aux frottements et enfin de celle qui correspond à la sortie. Donc

$$(1) \qquad Y = 0{,}49\,\frac{U^2}{2g} + \frac{4l}{D}(aU + bU^2) + \frac{U^2}{2g}.$$

Si l'orifice d'entrée est évasé, il n'y a pas lieu d'écrire le premier terme, et $0{,}49\,\frac{U^2}{2g}$ disparaît; le terme $\frac{U^2}{2g}$ reste toujours, parce que la vitesse U disparaît par agitation dans le réservoir inférieur : dans tous les cas, cette partie a d'autant moins d'influence que la longueur l est plus grande.

Le débit Q est donné par la formule

$$Q = \frac{1}{4} D^2 U; \tag{2}$$

de l'équation (1) on tire U; la seconde donnera ensuite Q.

Si le tuyau débouchait dans l'atmosphère, Y serait la différence de niveau entre le réservoir et le centre de l'orifice d'écoulement.

Si l'on demande, au contraire, de calculer le diamètre d'une conduite capable de débiter sous une charge donnée un certain volume d'eau, le problème devient beaucoup plus difficile, à moins qu'on n'emploie la formule de Dupuit

$$D = \sqrt[5]{\frac{1}{J}\left(\frac{Q}{20}\right)^2},$$

facile à calculer par logarithmes.

On peut aussi faire usage des tables à double entrée, parmi lesquelles nous signalerons celle de M. Mary, calculée d'après la formule de Prony, celles de Darcy, et enfin celles de M. Bresse, qui reposent également sur les résultats expérimentaux de Darcy.

Calcul de la pression en un point quelconque d'une conduite. — Calculons aussi la pression en un point quelconque d'une conduite. Soit p la pression en un point d'élévation z au-dessus d'un plan horizontal quelconque, p' et z' les quantités analogues pour une section distante de la première d'une longueur de tuyau égale à l; on a, en appliquant le théorème de Bernoulli, en ayant égard à la perte de charge,

$$z + \frac{p}{\Pi} = z' + \frac{p'}{\Pi} + \frac{4l}{D}(aU + bU^2).$$

Lorsque la valeur de p' donnée par cette équation pour un point quelconque du tuyau sera négative ou même notablement inférieure à la pression atmosphérique, on en conclura que la conduite projetée n'est pas possible.

Étude d'une distribution d'eau. — L'eau potable est amenée par des canaux ou élevée par des pompes dans de grands réservoirs ou *châteaux d'eau*, qui sont couverts pour éviter

l'échauffement de l'eau par le soleil et la fermentation des germes organiques qu'elle contient. C'est là qu'on établit généralement les filtres.

Conduites d'alimentation. — Du château d'eau partent de grosses conduites, ayant $0^m,80$ à $1^m,10$ de diamètre à Paris, $1^m,20$ à Glascow, amenant l'eau dans les divers quartiers de la ville (*).

On emploie, pour régler la dépense, des *robinets-vannes* mus par des vis.

Conduites de distribution. — Les conduites secondaires s'embranchent sur les lignes maîtresses; elles ont $0^m,10$ de diamètre, s'assemblent, comme les précédentes, au moyen de bagues, et sont fermées à l'entrée par des robinets à boisseau, par des robinets-vannes ou des clapets.

C'est de ces conduits que partent les tuyaux pour les divers services publics ou particuliers.

Calcul du niveau piézométrique. — S'il n'y avait pas de perte de charge, l'eau pourrait s'élever partout au niveau du réservoir; mais en chaque point il faut, pour avoir la colonne piézométrique, retrancher de la hauteur du réservoir toutes les pertes de charge qui ont lieu entre le réservoir et le point considéré. Outre la perte due aux frottements, et proportionnelle à la longueur du tuyau, il faut encore considérer celles qui sont dues aux renflements, étranglements, coudes et branchements.

1° *Renflements.* — Si v' est la vitesse avant le renflement,

Fig. 111.



v'' la vitesse dans la partie renflée (*fig.* 111), la perte de

(*) L'assemblage de ces tuyaux se fait aujourd'hui par simple juxtaposition avec couvre-joint; une bague de plomb est chassée à coup de masse, à froid, dans l'espace compris entre le tuyau et la bague qui sert de couvre-joint. Ce mode d'assemblage a toute la flexibilité désirable, et permet de couper le tuyau où l'on veut pour les réparations.

charge est $\frac{(v'-v'')^2}{2g}$, et l'on a, pour la différence des sommets des colonnes piézométriques,

$$\frac{v''^2}{2g}-\frac{v'^2}{2g}+\frac{(v'-v'')^2}{2g},$$

le niveau pouvant d'ailleurs être plus élevé en aval du renflement qu'en amont, à cause de la diminution de la vitesse.

2° *Étranglement.* — La perte de charge, dans ce cas, est due à la contraction suivie d'épanouissement (*fig.* 112); elle a

Fig. 112.



pour valeur $0,49\frac{v''^2}{2g}$, et l'on a, pour la différence des sommets des colonnes piézométriques,

$$1,49\frac{v''^2}{2g}-\frac{v'^2}{2g}.$$

Il y a donc intérêt à éviter tout changement brusque de section. Si l'on fait le raccordement de deux tuyaux de diamètres différents par un tube conique de 12 à 14 degrés au sommet, il n'y a plus aucune perte notable.

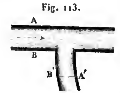
3° *Coudes.* — Les coudes donnent aussi lieu à une perte de charge; mais un coude bien arrondi, dont le rayon est assez grand, ne produit pas de perte sensible (*).

(*) Les coudes ont une influence d'une autre nature et dont il importe de se garantir. Si le coude est vertical, les branches étant dirigées vers le haut (*fig.* 114), il se rassemble dans sa partie inférieure des amas de matières étrangères, telles que du calcaire, du plâtre, qui finissent à la longue par gêner l'eau au passage, et l'arrêteraient complétement si l'on ne pratiquait au bas des robinets de vidange, qu'on ouvre de temps en temps quand la conduite est en charge, de manière à faire une *chasse*.

Si le coude a la position inverse (*fig.* 115), il se dégage des bulles d'air dissoutes dans l'eau qui s'y rassemblent et qui font baisser le niveau. On emploie alors quelquefois la disposition suivante pour se débarrasser automatiquement

4° *Branchements.* — Dans ce cas, la différence de niveau piézométrique pour deux sections telles que AB et A′B′ tient à deux causes : la variation de la vitesse, conséquence de la

Fig. 113.



diminution du débit, et la perte de charge due à une contraction suivie d'épanouissement. Ce phénomène est analogue à celui des ajutages cylindriques, mais la formule obtenue dans ce dernier cas n'est plus applicable, parce que le liquide venant de la conduite alimentaire n'arrive pas symétriquement

---

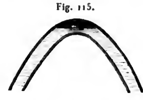
de cet air avant que sa pression ne soit devenue assez grande pour arrêter l'eau au passage.

Fig. 114.



[1] Un petit flotteur supporte une soupape s'appliquant exactement sur une ouverture pratiquée à la partie supérieure du coude. Lorsque le niveau de l'eau

Fig. 115.



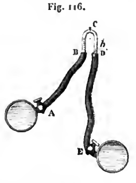
baisse un peu trop par suite de la quantité d'eau qui arrive, la soupape s'abaisse, et l'air en excès s'échappe ; l'eau afflue plus rapidement, élève le flotteur, et, par suite, la soupape qui ferme alors l'ouverture. Le plus souvent on emploie un simple robinet de purge qui se manœuvre à la main.

de toutes parts dans le tuyau d'embranchement. Des expériences faites en 1828 par Genieys et Belanger ont constaté que la conduite principale ayant $0^m,20$ de diamètre, et le second tuyau ayant $0^m,081$, si l'on désignait la vitesse dans ce dernier par V, la différence de niveau piézométrique entre deux points B et B', pris sur les deux conduites, serait de $3\frac{V^2}{2g}$ (*). Ce résultat, bien qu'utile à connaître, ne suffit pas pour établir une formule empirique de quelque généralité.

Sur une conduite d'une grande longueur, la perte due aux

(*) Bien que les pressions dont il s'agissait de constater la petite différence fussent très-grandes, on a pu obtenir cette différence dans un local très-restreint, à l'aide d'un instrument dont M. Belanger avait proposé l'idée et qu'il désigne sous le nom de *piézomètre différentiel*. En voici la description succincte (*fig.* 116) :

Fig. 116.



Deux tuyaux flexibles en plomb s'adaptent aux conduites A, E, et à un tube recourbé en verre BCD percé en C d'un trou capillaire, qu'on peut à volonte ouvrir ou fermer hermétiquement. Les robinets A, E sont d'abord fermés et les tuyaux de l'appareil sont pleins d'air. On ferme le trou C, puis on ouvre les robinets AE; l'air est refoulé vers le point C; on veille à ce qu'il ne puisse se loger dans les sinuosités des tuyaux en plomb. Si l'eau ne paraît pas dans les branches verticales du tube en verre, on laisse à l'air une très-petite issue en soulevant l'obturateur de l'orifice C, qu'on referme aussitôt que les deux sommets des colonnes d'eau s'élèvent au-dessus des points B, D. La différence de niveau de ces deux sommets, h, est la même que si les deux tubes aboutissaient à l'atmosphère ou même au vide; car on peut négliger la différence des pressions que l'air enfermé ou comprimé dans le tube de verre exerce sur les deux colonnes.

frottements l'emporte considérablement sur les autres qu'on peut négliger, au moins pour une première approximation. Aussi, dans le calcul d'une conduite complexe, on suppose ordinairement que le niveau piézométrique en chaque point de branchement est le même dans toutes les conduites qui s'y réunissent, et l'on calcule la charge en chaque point et par conséquent la vitesse d'écoulement qu'on pourra obtenir par un orifice ouvert en ce point, en ne tenant compte que des frottements. On doit toujours calculer les conduites pour pouvoir fournir éventuellement une quantité d'eau double de celle dont on a besoin d'une manière absolue. On règle la dépense au moyen de robinets; on se ménage ainsi un excédant précieux en cas d'incendie, et l'on peut remédier aux inconvénients des dépôts, qui ne tardent pas à engorger les tuyaux métalliques.

Ces concrétions sont de deux natures : 1° elles sont calcaires quand les eaux tiennent plus de 25 centigrammes de sels anhydres par litre; 2° celles qui en tiennent moins produisent des tubercules ferrugineux par suite de l'oxydation des tuyaux sous des influences électriques.

Enfin il convient de diminuer le nombre de modèles des tuyaux d'une distribution en faisant seulement attention que le diamètre d'aucune partie de la conduite ne soit inférieur à son diamètre théorique.

MOUVEMENT DE L'EAU DANS LES CANAUX DÉCOUVERTS.

§ VII. — Des canaux a régime permanent et uniforme.

La question du mouvement de l'eau dans les canaux présente la plus grande analogie avec la précédente. Seulement, pour que l'écoulement de l'eau puisse avoir lieu dans un canal découvert, il faut nécessairement une pente de superficie, condition qui distingue ce cas de celui que nous venons d'étudier. Nous supposerons d'abord le régime permanent et, de plus, *constant*, c'est-à-dire que les dimensions de la section

et l'inclinaison du lit ne varient point d'un lieu à un autre, de sorte que le mouvement est uniforme.

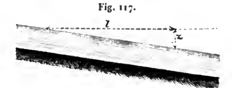
Représentons toujours la perte de charge par l'expression

$$z = \frac{l\chi}{\Omega}(aU + bU^2),$$

χ représentant ici le périmètre mouillé de la section, parce qu'à la surface libre le frottement peut être négligé. Quant à z, c'est la différence des niveaux piézométriques, c'est-à-dire la dénivellation superficielle, puisque l'écoulement a lieu à découvert et sous une pression constante.

On représente ordinairement par I (*fig.* 117) la pente $\frac{z}{l}$ par

Fig. 117.



mètre, et par R le rapport de la section au périmètre, rapport qu'on appelle *rayon moyen*. On a alors

$$RI = aU + bU^2.$$

D'après Prony on a

$$a = 0{,}000044, \quad b = 0{,}000309,$$

et, d'après Eytelwein,

$$a = 0{,}000042, \quad b = 0{,}000366.$$

Autres formules. — Si la vitesse U est assez grande, on peut prendre seulement le terme en U^2 de la formule, et écrire $RI = b_1U^2$, dans laquelle on donne à b_1 la valeur 0,0004, d'où

$$U = 50\sqrt{RI};$$

c'est la formule employée ordinairement par les ingénieurs italiens.

On peut aussi prendre une formule monome dans laquelle U soit affecté d'un exposant fractionnaire; soit

$$\mathrm{RI} = \mathrm{AU}^m,$$

et alors on a

$$\mathrm{A} = 0{,}00040102, \quad m = \frac{21}{12}.$$

La détermination de ces coefficients se fait, comme nous l'avons dit, en prenant les logarithmes et construisant la courbe qui a pour ordonnées log RI et pour abscisses log U; l'ordonnée, à l'origine de cette droite, est égale à log A : son coefficient angulaire est égal à m.

L'une ou l'autre de ces équations, et celle qui donne la dépense

$$\mathrm{Q} = \Omega \mathrm{U},$$

servent à résoudre les principales questions relatives aux canaux (*).

Lois des vitesses dans l'intérieur du liquide. — On a étudié comment varient les vitesses des filets liquides dans l'étendue d'un même profil transversal. On a distingué la vitesse

(*) Le manuscrit de Bour ne contenait rien des résultats obtenus par M. Bazin pour l'écoulement de l'eau dans les canaux découverts, et publiés par lui dans ses *Recherches hydrauliques* (1865). Il importe d'introduire ici les principales conclusions pratiques de ce grand travail. M. Bazin ramène à quatre types distincts les diverses natures de parois, et donne les formules suivantes :

1er type, parois très-unies............ $\dfrac{\mathrm{RI}}{u^2} = 0{,}00015\left(1 + \dfrac{0{,}03}{\mathrm{R}}\right)$,

2e type, parois unies.................. $\dfrac{\mathrm{RI}}{u^2} = 0{,}00019\left(1 + \dfrac{0{,}07}{\mathrm{R}}\right)$,

3e type, parois peu unies .... $\dfrac{\mathrm{RI}}{u^2} = 0{,}00024\left(1 + \dfrac{0{,}25}{\mathrm{R}}\right)$,

4e type, parois en terre.............. $\dfrac{\mathrm{RI}}{u^2} = 0{,}00028\left(1 + \dfrac{1{,}25}{\mathrm{R}}\right)$.

Le rapport $\dfrac{v}{u}$ de la vitesse maximum à la vitesse moyenne est exprimé par M. Bazin au moyen de l'équation

$$\frac{u}{v} = 1 + 14\sqrt{\frac{\mathrm{RI}}{u^2}},$$

moyenne U, la vitesse V à fleur d'eau dans la partie moyenne du canal, et enfin la vitesse W près du milieu du fond.

Dubuat et de Prony ont fait des expériences sur des canaux factices de nature très-différente, et ils ont trouvé les formules

$$U = \frac{V(V + 2.87)}{V + 3,15},$$

$$U = \frac{1}{2}(V + W).$$

Le rapport de U à V n'est pas constant; on peut cependant, sans grande erreur, admettre, pour des vitesses variant depuis $0^m,50$ à $1^m,50$,

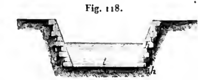
$$U = 0,80\,V,$$

d'où

$$W = 0,75\,U.$$

Problèmes sur les canaux. — Pour trouver les formules qui se rapportent à l'établissement d'un canal, nous supposerons

Fig. 118.



que la section soit un trapèze (*fig.* 118), conformément à ce qui a lieu le plus ordinairement.

Soit l la largeur au plafond, h la profondeur d'eau, n le rapport de la base des talus latéraux à la hauteur. On a

$$\chi = l + 2h\sqrt{1 + n^2},$$

$$\Omega = (l + nh)\,h:$$

donc

$$R = \frac{h(l + nh)}{l + h\sqrt{1 + n^2}},$$

et

$$Q = h(l + nh)\,U.$$

En adoptant la deuxième formule, on a

$$I = 0,0004 \times Q^2 \frac{l + 2h\sqrt{1+n^2}}{h^3(l+nh)^3}.$$

Ces formules permettent de résoudre les deux problèmes principaux des canaux : *Étant donné un canal, trouver la quantité d'eau qu'il débite,* et *construire un canal ayant un débit donné.*

Dans ce dernier cas, le problème est indéterminé, car on n'a que deux équations pour déterminer cinq inconnues. Cette indétermination existe dans tous les problèmes de la pratique, qui sont rarement susceptibles d'une solution unique et rigoureuse. Les circonstances particulières dans lesquelles on se trouve placé pour chaque cas particulier permettront de résoudre la question en fournissant les données qui manquent. Dans le cas qui nous occupe :

1° n est donné par la nature du terrain. Il devra être au moins égal à 1; il prendra d'ailleurs des valeurs plus ou moins grandes, suivant la consistance du terrain dans lequel doit être creusé le canal. Le plus souvent, $n = 1,5$ ou 2, ou même 2,5. Si l'on construit des berges en maçonnerie, il y aura avantage à faire $n = 0$, c'est-à-dire à faire des talus verticaux.

2° La nature du sol détermine aussi le maximum de vitesse qu'on puisse donner à l'eau de manière à ne dégrader ni le fond ni les berges. D'après ce que nous avons vu, on peut admettre que la vitesse près du fond et des berges est les trois quarts de la vitesse moyenne. D'un autre côté, voici un tableau indiquant pour quelles vitesses de fond les affouillements commencent :

	m
Argile et terre détrempée	0,076
Argiles tendres	0,152
Sables fins	0,200
Sables ordinaires	0,305
Graviers	0,609
Schistes tendres	1,55
Roches de dureté moyenne	1,85
Roches dures	3,05

3° Si le canal doit servir à la navigation, la largeur et la profondeur minimum du canal sont aussi déterminées par les dimensions et le tirant d'eau des bateaux.

4° On doit chercher enfin à économiser sur la quantité de terre à déplacer pour construire le canal, et aussi sur la pente, de manière à arriver aux usines à la plus grande hauteur possible. Alors, Q étant donné, il faudra rendre I un minimum.

On peut se donner I et Q, et construire une courbe en posant

$$\frac{l}{2} + nh = x, \quad h = y.$$

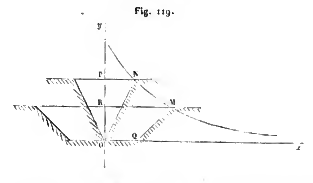
L'équation de cette courbe est :

$$Iy^3(2x - ny)^3 = 0{,}0008\,Q^2\left[x + y\left(\sqrt{1-n^2} - n\right)\right].$$

La branche utile est asymptotique à l'axe des x ; elle permet de trouver par tâtonnements une forme convenable pour le canal.

En effet, si l'on prend un point M (*fig.* 119) et qu'on mène

Fig. 119.



par ce point une droite MQ ayant l'inclinaison déterminée par la nature du terrain, et une parallèle MR à l'axe des x, on a la demi-section OQMR d'un canal satisfaisant aux conditions voulues. On en a ainsi autant qu'on veut, et l'on cherche celle qui convient le mieux au cas dans lequel on se trouve. La largeur peut augmenter indéfiniment ; la hauteur a une limite supérieure OP, correspondant à une section triangulaire qui n'est pas admissible en pratique.

La formule se simplifie dans le cas où le lit est à peu près rectangulaire, et de largeur assez grande pour qu'on puisse négliger les termes nh et $2h\sqrt{1+n^2}$ devant l. On a alors les formules

$$I = \frac{0{,}0004\,Q^2}{h^3 l^2} \quad \text{et} \quad Q = lhU.$$

De là on tire

$$h = 0{,}0737\sqrt[3]{\frac{Q^2}{l^2 I}}.$$

De la prise d'eau. — Lorsqu'un canal est destiné à faire une prise d'eau dans une rivière (*fig.* 120), il faut avoir soin

Fig. 120.



d'évaser l'entrée pour éviter la contraction et faire en sorte que le niveau soit le même dans la rivière et dans le canal. Il faut souvent construire un pont à l'origine de la dérivation pour le service du halage de la rivière, si elle est navigable. On en profite pour se ménager le moyen d'intercepter au besoin la communication de la rivière avec le canal et pour empêcher, par exemple, les crues de la rivière d'y pénétrer.

Pertes d'eau par évaporation et infiltration. — Enfin, dans le calcul du débit d'un canal, il faut avoir soin de tenir compte de deux causes de pertes. Il y aura perte d'eau par infiltration et par évaporation; la seconde est, dans nos climats, en grande partie restituée par la pluie.

Dans le midi de la France, le déchet par évaporation est

très-notable. Sur le canal de Bourgogne, au contraire, la pluie l'emporte sur l'évaporation.

		Hauteur de la tranche d'eau évaporée par an.	Hauteur de la pluie tombée en un an.
		m	m
	Paris............	1,46	0,55
	Nantes..........	1,81	1,00
	Marseille........	2,50	0,560
Canal de Bourgogne.	Dijon...........	0,6282	0,7518
	Pouilly..........	0,5648	0,8008

Infiltrations. — La perte d'eau par infiltration est souvent considérable, surtout au moment de l'ouverture du canal; une fois que le sol est bien pénétré de liquide, la perte par infiltration devient généralement insignifiante, par suite de l'obturation par les sédiments des petits canaux de fuite. Quelquefois, cependant, on est obligé de faire un corroi d'argile ou même de bétonner le sol du canal; c'est ce qu'on a fait pour une section du canal de la Marne au Rhin.

La nature des parois a une grande importance dans certains cas relatifs aux canaux et aux rivières. Le fond peut être encombré d'herbes qui retardent considérablement le courant, et dont on ne peut empêcher l'influence défavorable qu'en curant le canal. On obtient, par cette opération, une diminution considérable sur la hauteur qui correspond à un débit donné.

§ XII. — Des canaux et des rivières a régime permanent, mais non uniforme.

Le mouvement uniforme dans une conduite ou dans un canal est impossible, quand la section est variable, ou bien quand la pente du lit varie, comme cela a lieu pour les rivières. Les filets liquides qu'elle contient ont, aux divers points de leur cours, des vitesses très-variées, depuis la source jusqu'à l'embouchure, et cependant le régime est permanent, si la quantité d'eau débitée par la source est constante.

Quand il se produit une crue, le régime cesse d'être permanent jusqu'à ce que la hauteur du liquide soit celle qui con-

vient à la nouvelle quantité d'eau que débite la source; la rivière prend alors un nouvel état de permanence, qu'elle perd plus tard quand les causes qui ont produit la crue ont cessé d'agir.

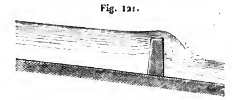
La théorie du mouvement varié dans les rivières est très-difficile à établir par l'expérience, et presque inabordable au calcul.

Nous nous bornerons à indiquer un seul résultat relatif au cas où la section est constante.

Du ressaut à la surface du cours d'eau. — Nous étudierons un cas de régime permanent, mais non constant, qui présente une certaine utilité pratique et qui est assez curieux.

Nous avons vu que, lorsqu'on a un cours d'eau à régime constant et qu'on vient à le couper par un barrage, le niveau de l'eau et son régime ne sont pas sensiblement changés en aval; mais en amont la surface libre forme ordinairement une surface asymptotique de la surface primitive (*fig* 121). Il y a

Fig. 121.



des cas très-nombreux où ce raccordement n'a pas lieu; il se produit, au contraire, un ressaut brusque qu'on observe aussi dans d'autres circonstances, et généralement lorsque le courant est large, très-rapide et peu profond. Ce phénomène a été observé et décrit avec détails pour la première fois par Bidone (*).

(*) Lorsque les eaux de la mer arrivent avec une vitesse assez considérable sur une plage peu inclinée (*fig.* 122), elles s'étalent d'abord uniformément,

Fig. 122.

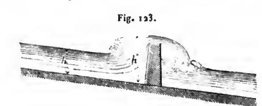


puis elles déferlent, perdent la plus grande partie de leur vitesse, et achèvent de couvrir le sol d'une nappe mince.

Examinons quelques-unes des circonstances qui accompagnent ce phénomène.

Faisons une section en amont et une section en aval, de manière à comprendre toute la partie du liquide sur laquelle le phénomène a lieu, et appliquons le théorème de la quantité de mouvement à tout le liquide interposé. Soient h et h' les profondeurs d'eau en amont et en aval (*fig.* 123), v et v' les vitesses correspondantes, ω et ω' les sections.

Fig. 123.



Si Q est le débit en volume, l'accroissement de la quantité de mouvement en une seconde est

$$\frac{\Pi Q}{g}(v' - v).$$

Nous supposons le lit peu incliné : alors les seules forces dont il faut calculer l'impulsion sont la pression en amont et la pression en aval. Puisqu'au point où l'on a fait la section le mouvement est uniforme, la pression en amont est

$$\Pi \int z\,d\omega = \frac{1}{2}\Pi\omega h;$$

de l'autre côté, on aura

$$\frac{1}{2}\Pi\omega' h';$$

donc, enfin, on a l'équation

$$\frac{\Pi Q}{g}(v' - v) = \frac{1}{2}\Pi(\omega h - \omega' h').$$

Or

$$Q = \omega v = \omega' v'.$$

Donc

$$\frac{h}{h'} = \frac{\omega}{\omega'} = \frac{v'}{v},$$

donc on a

$$\omega' = \omega\,\frac{h'}{h}, \quad v' = v\,\frac{h}{h'};$$

en substituant ces valeurs dans l'équation écrite plus haut, et supprimant II qui est facteur commun, on a

$$\frac{v^2}{g} = \frac{h'}{2h}\,(h + h'),$$

d'où l'on tire

$$h' = -\frac{h}{2} + \sqrt{\frac{h^2}{4} + 2h\frac{v^2}{g}}.$$

Pour que le phénomène se produise, il faut un certain nombre de conditions qui ne nous sont point connues; mais d'abord il faut évidemment qu'on ait $h' > h$, ou

$$\sqrt{\frac{h^2}{4} + 2h\frac{v^2}{g}} > \frac{3}{2}\,h,$$

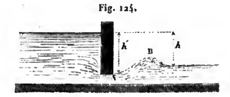
ou enfin

$$\frac{v^2}{2g} > \frac{h}{2};$$

donc le phénomène pourra se produire, lorsque la profondeur de l'eau sera inférieure au double de la hauteur due à sa vitesse.

On cherche ordinairement à produire ce phénomène dans

Fig. 124.



les appareils destinés à donner de l'eau aux moteurs hydrauliques. Le réservoir est fermé par une vanne qui laisse écouler

au-dessous d'elle une lame mince de liquide. Si la vitesse est assez forte, le phénomène du ressaut a lieu, et l'on augmente la chute dont on dispose en installant le récepteur entre les points A et B (*fig.* 124). Si l'on diminuait de plus en plus la profondeur, l'orifice finirait par être noyé, et l'on n'en tirerait plus aucun avantage (*).

§ XIII. — Du choc de l'eau contre un plan fixe.

Un courant liquide, lancé dans le vide ou dans l'air, rencontre un plan fixe qui l'oblige à se dévier. On suppose qu'à une certaine distance en avant du plan les divers filets liquides se meuvent parallèlement avec une vitesse commune, de manière que la pression dans toute la section de la veine soit égale à la pression atmosphérique. On suppose encore le plan assez étendu pour que le liquide ne le quitte pas sans avoir totalement perdu sa vitesse normale, de sorte qu'à une certaine distance du point d'arrivée de la veine le mouvement ait lieu parallèlement au plan.

A cet égard, remarquons qu'au premier instant, surtout si la vitesse de l'eau affluente est considérable, on a des rejaillissements partiels dont nous ne cherchons pas à déterminer la théorie. Bientôt l'air interposé entre le plan et la veine se trouve entraîné; la veine s'applique exactement contre le plan, et un mouvement permanent s'établit; nous allons calculer les circonstances du mouvement parvenu à cet état.

Considérons à cet instant la partie du liquide CDABD'C' comprise entre une section AB faite perpendiculairement au courant, et une surface cylindrique CD, C'D', au delà de laquelle le liquide coule parallèlement au plan pressé YZ. Ce plan est perpendiculaire au plan de la figure et fait avec la verticale un angle α. Soit v la vitesse commune des molécules qui traversent le plan AB. Après un temps dt, ces molécules se trouveront dans un plan voisin ab dont la distance à AB sera $v\,dt$. Au même instant final, les molécules qui se trouvaient d'abord dans la surface cylindrique désignée dans la

(*) *Voir* à ce sujet l'Introduction à la *Mécanique industrielle* de Poncelet.

figure par CD, C′D′ seront sur une autre surface voisine dont *cd* et *c′d′* représentent deux arêtes. Ainsi tout le système

Fig. 125.

des points matériels considéré sera finalement compris entre le plan *ab* et la surface *cd*, *c′d′*. Ceux de ces points qui, au dernier instant, se trouveront entre *ab* et CD, C′D′ auront, en vertu de la permanence, les mêmes masses et les mêmes vitesses que ceux qui y étaient d'abord.

Cela posé, appliquons à toute la masse liquide que nous venons de définir le théorème de la quantité de mouvement, en prenant pour axe de projection la perpendiculaire OX au plan YZ.

D'après le raisonnement que nous avons déjà fait bien des fois, il n'y a pas à s'occuper de la partie géométrique commune au volume initial et au volume final. De plus, les vitesses entre CD, *cd*, C′D′, *c′d′* étant perpendiculaires à OX, la quantité de mouvement du liquide correspondant n'entrera pas dans notre équation. Nous aurons donc seulement à tenir compte du liquide AB, *ab*, dont la masse est

$$\frac{\Pi}{g}\,\Omega v\,dt,$$

et dont la vitesse a pour projection

$$-v\sin\beta,$$

en désignant par β l'angle de la vitesse v avec le plan YZ, angle qui ne se projette pas en vraie grandeur dans la figure.

La quantité de mouvement que nous venons de calculer se rapportant à l'état initial du liquide, il faut changer son signe pour la faire figurer au premier membre de notre équation ordinaire. Comme il n'y a d'ailleurs rien autre chose à écrire, ce premier membre est simplement

$$\frac{\Pi}{g}\Omega v^2 \sin\beta\, dt.$$

Passons aux termes qui y représentent les projections des impulsions des forces extérieures. Les réactions du plan sont de deux natures, tangentielles et normales. Nous ne nous occuperons pas des premières, qui n'ont pas de projections sur l'axe que nous avons choisi, et nous désignerons par F la somme des réactions normales, en faisant abstraction de la pression atmosphérique. L'impulsion projetée de cette force est

$$F\, dt.$$

La pression atmosphérique ne doit pas entrer en ligne de compte, car nous avons vu que, sur un corps limité de toute part, la somme algébrique des projections sur un axe quelconque est nulle.

Enfin il ne reste plus qu'à tenir compte de l'impulsion du poids du liquide que nous considérons, soit

$$-P\sin\alpha\, dt.$$

On a donc, en supprimant le facteur dt,

$$\frac{\Pi}{g}\Omega v^2 \sin\beta = F - P\sin\alpha,$$

d'où

$$F = P\sin\alpha + \Pi\Omega\frac{v^2}{g}\sin\beta.$$

La partie $P\sin\alpha$ dépendant de l'action de la pesanteur est la pression qu'exercerait le système solide DCABC'D' reposant sur le plan YZ. L'autre partie de la pression F est égale au poids d'un cylindre liquide qui aurait pour base la section

droite Ω du courant AB, et pour longueur le double de la hauteur $\frac{v^2}{2g}$ due à la vitesse v, les arêtes faisant avec la base du cylindre l'angle β que la direction du courant, prise au point où sa vitesse est v, fait avec le plan qu'il rencontre. On peut aussi mettre cette partie de F sous la forme

$$\Pi \frac{\Omega}{\sin\beta} \frac{(v \sin\beta)^2}{g},$$

et dire que c'est le poids d'un cylindre du liquide, ayant pour base la section oblique faite au point A dans la veine supposée cylindrique par un plan parallèle au plan YZ et pour hauteur le double de la hauteur due à la vitesse $v \sin\beta$, projection rectangulaire de v sur OX.

Si le plan rencontré était peu étendu, les vitesses du liquide au delà de ce plan feraient des angles obtus avec OX, et la force F serait diminuée, parce que la quantité de mouvement projetée finale serait algébriquement plus petite que dans le cas précédent. Il en serait de même si au lieu du plan on avait une surface convexe. Par la raison contraire, si, au moyen de rebords adaptés au plan pressé par le liquide, on obligeait le courant à le quitter en faisant des angles aigus avec la normale OX, ou si l'on faisait arriver le liquide sur une surface concave, la pression F serait plus grande. On peut ainsi augmenter la force d'une roue hydraulique, en garnissant de liteaux les côtés des palettes qui reçoivent le choc de l'eau.

Aux premiers instants de la rencontre du plan par le fluide, avant que le régime permanent soit établi, la pression est beaucoup plus grande, parce que les valeurs absolues des vitesses dans l'espace ab D' C' C D diminuent très-rapidement.

Si le plan, au lieu d'être fixe, était mobile, tout ce que nous venons de dire subsisterait à la condition de remplacer la vitesse absolue v par la vitesse relative.

Résistance d'un fluide au mouvement d'un solide.

L'expérience a constaté que si, dans un courant de grandes dimensions transversales, on plonge un corps solide, la résultante des pressions horizontales que celui-ci reçoit du liquide

en mouvement est, à peu près pour un même corps, proportionnelle au carré de la vitesse relative. En soumettant à cette expérience une plaque mince, puis un cube, puis un prisme d'une longueur triple, Dubuat a reconnu :

1° Que la pression sur la face opposée au courant est plus grande que la pression hydrostatique;

2° Que la pression sur la face d'aval où a lieu un remous est au contraire plus petite;

3° Que la résultante de ces deux forces peut être représentée par la formule

$$K \Pi A \frac{v^2}{2g},$$

dans laquelle Π est le poids de l'unité de volume du liquide, A l'aire de la section transversale du corps; v la vitesse relative du liquide; K un coefficient qui est, suivant Dubuat, 1,43 pour la plaque mince, 1,17 pour le cube et 1,10 pour le prisme. Si les plans antérieur et postérieur sont remplacés par des surfaces convexes, le coefficient K diminue.

La résistance de l'air suit des lois analogues. Pour un train composé de n wagons, A étant toujours la surface de front en mètres carrés, v la vitesse en mètres par seconde, on admet l'expression

$$0{,}065\,[A + 0{,}9\,(n-1)]\,v^2.$$

Corps flottants. — Si l'on appelle A la section droite de la partie plongée d'un prisme, la formule de la résistance est, d'après l'expérience, la même que dans le cas précédent. Si le prisme est terminé rectangulairement et que sa longueur soit de trois à six fois $\sqrt{A}$, on a environ

$$K = 1{,}10.$$

Avec une poupe suffisamment aiguë, on peut avoir

$$K = 1{,}00.$$

Si l'on ajoute à un bateau prismatique une proue formée, soit de deux plans verticaux d'une saillie égale à la largeur du bateau, soit d'une surface cylindrique verticale à base demi-circulaire, on a à peu près

$$K = 0{,}50.$$

Une proue formée des faces latérales du bateau prolongées et coupées au-dessous par un plan faisant avec l'horizon un tiers d'angle droit réduit la résistance au tiers ; dans ce cas

$$K = 0,33.$$

Pour un navire, A étant la surface plongée du maître-couple, on peut avoir, selon Navier,

$$K = 0,16.$$

On cherche aujourd'hui à donner aux lignes d'eau d'un navire la plus grande finesse de formes possible à l'arrière comme à l'avant.

CHAPITRE IV.

DE L'ÉQUILIBRE ET DU MOUVEMENT DES FLUIDES ÉLASTIQUES.

§ XIV. — Des lois de l'équilibre des gaz.

La condition générale d'équilibre des fluides pesants s'applique aux gaz comme aux liquides. La pression et la densité doivent être les mêmes en tous les points d'une même couche de niveau. On déduit de là l'équation différentielle qui donne la loi des pressions aux divers points d'une masse gazeuse en équilibre

$$(1) \qquad dp = \varpi\, dz;$$

mais on ne peut intégrer cette équation comme quand il s'agissait d'un liquide, car le poids spécifique ϖ n'est pas constant : il varie très-rapidement avec la pression et un autre élément, la *température*. Si l'on admet comme donnant une approximation suffisante les lois de Mariotte et de Gay-Lussac, on a entre ces trois quantités la relation

$$(2) \qquad p = K\varpi(1 + \alpha t),$$

K étant un coefficient constant pour un même gaz, α une seconde constante qu'on appelle *coefficient de dilatation.*

Pour avoir la valeur numérique de K, on se place dans l'hypothèse particulière où l'on a $t = 0$, et où p est la pression atmosphérique, 10333 kilogrammes. Dans ces conditions pour l'air, on a

$$\varpi = 1^{kg},2932;$$

par suite,

$$K = \frac{10,333}{1,2932} = 7990,2.$$

Pour l'air atmosphérique pur, on a, d'après M. Regnault,

$$\alpha = 0,003665.$$

En divisant l'équation (1) par l'équation (2), il vient

$$(3) \qquad \frac{dp}{p} = -\frac{dz}{K(1+\alpha t)}.$$

On n'a d'ailleurs besoin d'intégrer cette équation, c'est-à-dire de tenir compte de la variation de la pression avec la hauteur z, que lorsque cette hauteur est très-grande, par exemple quand on considère toute la masse gazeuse qui constitue l'atmosphère terrestre.

Mesure des hauteurs par le baromètre. — C'est la connaissance de la loi suivant laquelle la pression de l'air varie aux différentes hauteurs accessibles qui permet de mesurer la hauteur des montagnes au moyen de l'observation du baromètre.

Pour trouver cette loi, il faut intégrer l'équation (3), en faisant $K = 7990,2$ et prenant

$$\alpha = 0,004,$$

afin de tenir compte à peu près de l'humidité contenue dans l'air atmosphérique.

Quant à la température t, c'est une variable qui dépend de z, l'air étant supposé en équilibre, et, pour pouvoir intégrer l'équation (3), il faudrait connaître la loi de décroissance des températures avec les hauteurs. On en conclurait la loi qui lie les pressions avec les hauteurs, et, par suite, au moyen de l'observation barométrique des pressions, on calculerait les hauteurs des divers points où l'on aurait observé. Malheureusement, la théorie et l'expérience n'ont pu jusqu'ici déterminer la loi des variations des températures; aussi les formules qui servent à déduire les hauteurs des observations barométriques sont-elles plus ou moins entachées d'empirisme.

Nous renvoyons à la *Mécanique céleste* de Laplace et à l'*Annuaire du Bureau des Longitudes* pour ces formules, qui ont été réduites en Tables d'un emploi commode, très-précieuses en l'absence de tout autre moyen de nivellement.

Des gaz et des vapeurs. — Au point de vue des applications mécaniques, il y a lieu de conserver la distinction (qui n'a plus sa raison d'être sous le rapport physique) entre les *vapeurs* et les *gaz permanents*. Les vapeurs se trouvent dans les machines sous deux états, à l'état liquide et à l'état gazeux, tandis que les gaz permanents ne changent pas de constitution.

Les propriétés des gaz et des vapeurs sont étudiées spécialement dans les Cours de Physique; nous nous contenterons de rappeler succinctement celles dont nous avons besoin.

La formule (2) donne, pour le poids ϖ de 1 mètre cube d'air, en appelant n la pression en atmosphères, c'est-à-dire le rapport $\frac{p}{10333}$,

$$(4) \qquad \varpi = 1^{\text{kg}},2932 \frac{n}{1+\alpha t}.$$

Pour chacun des autres gaz, il faudra multiplier le second membre par la densité δ du gaz prise par rapport à l'air, densité que l'on regarde comme constante; ceci n'est pas même une approximation pour les vapeurs dans le voisinage de leur point de saturation, c'est-à-dire dans les conditions de leur emploi mécanique. Il faut aussi remplacer α par le coefficient de dilatation spécial au gaz considéré.

En désignant par v le volume en mètres cubes de 1 kilogramme de gaz, c'est-à-dire en faisant

$$v = \frac{1}{\varpi},$$

on peut mettre l'équation (2) sous la forme

$$(5) \qquad pv = \mathrm{R}\left(\frac{1}{\alpha} + t\right).$$

Pour l'air atmosphérique, on a

$$\frac{1}{\alpha} = 272,85,$$
$$\mathrm{R} = 29,272;$$

d'où

$$(6) \qquad pv = 29,272(272^\circ,85 + t) = 29,272\,\tau,$$

en désignant par τ la température comptée à partir de $-272°,85$ C.

Si l'on fait $\tau = 0$, c'est-à-dire $t = -272°,85$, on a

$$pv = 0,$$

c'est-à-dire $v = 0$ si le refroidissement de l'air s'opère sous une pression constante; $p = 0$ si ce refroidissement a lieu dans une capacité à volume constant.

On ne doit attacher à ce résultat aucune importance, même théorique; car les lois empiriques, dont les équations (2) et (5) sont la traduction, n'ont été établies que dans des limites bien éloignées de 273 degrés au-dessus de zéro.

Quoi qu'il en soit, il est commode, dans les calculs relatifs aux gaz, de compter les températures à partir de ce point fixe qu'on nomme *zéro absolu*. La température τ sera donc, pour nous, la *température absolue;* elle s'obtiendra en ajoutant 272°,85 à la température ordinaire exprimée en degrés centigrades.

Propriétés générales des vapeurs. — Parmi les gaz qui, dans leurs applications industrielles possibles, sont susceptibles de présenter alternativement, à l'état liquide ou solide et à l'état gazeux, gaz auxquels nous restreignons, comme je l'ai dit, la dénomination ancienne de *vapeurs*, la vapeur d'eau est celle qui a le plus d'importance à notre point de vue, et c'est elle que nous considérerons spécialement en indiquant, s'il y a lieu, les différences qui ont été découvertes récemment entre ses propriétés et celles de certaines autres vapeurs.

On admettait autrefois, sans preuve expérimentale suffisante, que les vapeurs obéissaient à peu près aux lois de Mariotte et de Gay-Lussac, et que, pour la vapeur d'eau en particulier, le coefficient de dilatation α avait la même valeur que pour l'air atmosphérique.

On employait alors, dans la théorie de la vapeur d'eau, des équations de même forme que les précédentes, en tenant compte seulement de ce que la densité de la vapeur d'eau par rapport à l'air avait pour valeur

$$\delta = 0,6225.$$

De la sorte, les équations (4) et (6) se trouvaient remplacées

par les suivantes :

(4 *bis*) $$\varpi = 0^{kg},80565 \frac{n}{1+\alpha t'}$$

et

(6 *bis*) $$pv = 47,023t.$$

Seulement, dans l'équation à trois variables (2), appliquée à la vapeur d'eau, ces variables ne pouvaient pas prendre toutes les valeurs possibles satisfaisant à cette équation, puisque (et c'était là la partie connue avec le plus de précision de l'histoire de la vapeur) la pression p atteignait, pour chaque valeur de la température, un maximum dépendant uniquement de cette température t, ce que nous exprimons par $t = f(p)$.

Pour achever ce qui se rapporte aux anciennes lois relatives à la vapeur d'eau, disons encore que, d'après M. Regnault, la quantité de chaleur contenue dans 1 kilogramme de vapeur à la pression p et à la température t est donnée par la formule

$$q = 606,50 + 0,305 f(p) + 0,475 [t - f(p)].$$

Nouvelles recherches sur les vapeurs. — Dans ces dernières années, sous l'influence de nouvelles idées théoriques dont nous aurons à parler tout à l'heure, une vive impulsion a été imprimée aux recherches théoriques et pratiques relatives à la vapeur d'eau. Nous citerons seulement, parmi les étrangers, MM. Clausius, Rankine, Zeuner; en France, M. G.-A. Hirn.

Occupons-nous d'abord de la vapeur saturée.

Il résulte des travaux dont je viens de parler que la vapeur saturée n'obéit pas aux lois de Mariotte et de Gay-Lussac, c'est-à-dire que l'équation (6 *bis*) n'est point exacte d'une manière générale, bien qu'on puisse l'appliquer entre zéro et 150 degrés avec une approximation suffisante (il s'agit toujours uniquement de la vapeur saturée).

M. Zeuner a posé la formule empirique

(7) $$pv = \mathrm{M} \,\mathrm{log\,nép} \frac{\text{[illegible]}}{100}.$$

D'ailleurs, si l'on construit la ligne donnant les valeurs du produit pv en fonction de t, on trouve que cette ligne est

sensiblement droite dans les limites des pressions en usage dans les machines à vapeur.

On peut donc, dans ces limites, remplacer l'équation (7) par une équation linéaire de même forme que celle qui répond aux gaz parfaits.

Posons donc

$$pv = R'\left(\frac{1}{\alpha'} + t\right),$$

et déterminons les coefficients en faisant usage des nombres qui se rapportent à 1 et 5 atmosphères.

On trouve

$$\frac{1}{\alpha} = 412^\circ{,}82, \quad R' = 33{,}16.$$

On a ainsi

$$\alpha' = 0{,}00242,$$

nombre que l'on peut regarder, si l'on veut, comme le coefficient moyen de dilatation de la vapeur saturée de 100 degrés à 152°,22.

Seulement il faut remarquer que, quand on parle du coefficient de dilatation d'un gaz, on sous-entend toujours que ce coefficient répond à la dilatation du gaz sous pression constante; c'est ce qui n'a pas lieu ici, puisqu'on suppose que la vapeur reste saturée.

Densité de la vapeur saturée. — Dans l'équation (7), remplaçons p par sa valeur en fonction de t; nous aurons la densité de la vapeur par la formule

$$\varpi = \frac{1}{v}.$$

Les nombres qu'on obtient ainsi pour ϖ croissent un peu plus vite que ceux qu'on déduirait des lois ordinaires.

C'est ce qu'indique le tableau suivant :

	VALEURS DE ϖ.	
Température.	Loi de Mariotte.	Formule de M. Zeuner.
50°	0,0823	0,0826
100	0,5892	0,6075
150	2,4481	2,6082
200	7,1459	7,8616

Vapeurs surchauffées. — Pour les vapeurs surchauffées, les écarts de la loi de Mariotte, ainsi qu'on devait s'y attendre, sont d'autant moins grands que la surchauffe est plus considérable et que la vapeur se rapproche plus de l'état gazeux parfait.

Pour donner une idée de la grandeur des écarts dont il s'agit, je citerai les résultats numériques d'une seule des expériences de M. Hirn, dans laquelle la température a été maintenue constante et égale à 280 degrés :

Pression initiale p.	$\frac{v}{v_0}$	$\frac{pv}{p_1 v_1}$
64^{atm}	»	»
32	2,059	1,030
16	2,045	1,022
8	2,031	1,015
4	2,018	1,009
2	2,010	1,005
1	2,002	1,001

On vérifie, conformément à ce que M. Regnault a annoncé relativement aux gaz liquéfiables, que la compressibilité croît à mesure qu'on s'approche du point de liquéfaction.

M. Hirn a appliqué sa méthode de calcul à l'acide carbonique, et l'accord des nombres qu'il a calculés avec ceux qui ont été déterminés expérimentalement par M. Regnault est extrêmement remarquable. (*Exposition analytique et expérimentale de la Théorie mécanique de la Chaleur*, par G.-A. Hirn, p. 386.)

Lois du mélange des gaz et des vapeurs. — Nous n'avons rien de nouveau à signaler sur cette question au point de vue qui nous occupe, et nous renverrons aux lois connues des mélanges des gaz et des vapeurs, qui ont été suffisamment étudiées en Physique.

Le tableau suivant, extrait de l'Ouvrage de M. Zeuner, est utile dans la théorie des machines à vapeur :

TENSIONS en atmosphères p	TEMPÉRATURE correspondante $f(p)$	VOLUMES v	DENSITÉS $\varpi = \frac{1}{v}$.
0,25	65,35	6,0926	0,1641
0,50	31,71	3,1653	0,3159
0,75	92,15	2,1588	0,4632
1	100,00	1,6459	0,6075
1,25	106,35	1,3338	0.7497
1,50	111,74	1,1234	0,8901
1,75	116,43	0,9718	1,0290
2	120,00	0,8570	1,1668
2,25	124,36	0,7672	1,3035
2,50	127,80	0,6949	1,4390
2,75	130,97	0,6354	1,5738
3	133,91	0,5856	1,7076
3,25	136,66	0,5432	1,8409
3,50	139,24	0,5067	1,9735
3,75	141,68	0,4749	2,1057
4	144,00	0,4471	2,2366
4,25	146,19	0,4224	2,3674
4,50	148,29	0,4004	2,4975
4,75	150,29	0,3806	2,6274
5	152,22	0,3627	2,7571
5,25	154,06	0,3465	2,8860
5,50	455,84	0,3318	3,0139
5,75	157,56	0,3183	3,1417
6	159,22	0,3058	3,2701
6,25	160,82	0,2944	3,0000
6,50	162,38	0,2838	3,0000
6,75	165,88	0,2740	3,6496
7	165,35	0,2648	3,7765
7,25	166,77	0,2563	3,9017
7,50	168,15	0,2484	4,0274
7,75	169,50	0,2404	4,1528
8	170,81	0,2338	4,2771
8,25	172,09	0,2271	4,4034
8,50	173,34	0,2209	4,5269
8,75	174,57	0,2150	4,6512
9	175,77	0,2094	4,7756
9,25	176,94	0.2042	4,8972
9,50	178,09	0,1991	5,0226
9,75	179,21	0,1944	5,1440
10	180,31	0,1899	5,2659

§ XV. — Écoulement des gaz et des vapeurs.

Un gaz qui sort d'un réservoir n'est pas dans les mêmes conditions qu'un liquide s'écoulant par le même orifice. En effet la pesanteur ne joue, pour ainsi dire, aucun rôle dans les phénomènes de l'écoulement des gaz; il faut un excès de pression, auquel correspond nécessairement un accroissement de densité, en vertu de la compressibilité des fluides élastiques, pour forcer un gaz à passer d'un réservoir dans un autre ou dans l'air atmosphérique.

Il suit de là que, au moment où le gaz s'échappe, il se détend, et il se passe, dans les environs de l'orifice, un phénomène complexe dont les lois n'ont peut-être pas encore été suffisamment étudiées par l'expérience.

Les choses sont encore bien plus compliquées quand il s'agit d'une vapeur. En effet on sait que la détente brusque d'un gaz est généralement accompagnée d'un refroidissement. Cet abaissement de température dépend d'ailleurs d'un grand nombre de circonstances, et il y a lieu de se demander s'il ne pourra pas, dans certains cas, amener la condensation partielle de la vapeur.

Bornons-nous, pour le moment, à donner les formules qui permettent de calculer la dépense qui se fait par un orifice donné, sous l'influence d'un excès de pression connu.

On trouve, dans plusieurs auteurs, une théorie basée, comme la théorie analogue relative aux liquides, sur le théorème des forces vives. On considérait la détente du gaz comme se faisant d'une manière graduelle et continue, depuis le réservoir jusqu'au point de sortie, et l'on tenait compte, dans l'établissement de l'équation, du travail développé par l'expansion du gaz.

En supposant la température invariable, ce qui n'est pas exact, on arrivait à une formule logarithmique due à Navier, et applicable seulement à de faibles différences de pression. On introduisait naturellement dans cette formule un coefficient de correction à déterminer expérimentalement.

Mais l'expérience ne confirme pas en général l'hypothèse

fondamentale de la théorie de Navier, celle de la détente du gaz dans le réservoir.

MM. Pecqueur et Poncelet, dans un travail présenté à l'Académie des Sciences le 21 juillet 1845, ont montré que les gaz s'écoulent comme les liquides, en conservant à la sortie la densité qu'ils avaient dans le réservoir et se détendant seulement quand ils sont arrivés dans l'air atmosphérique. Les formules que nous avons trouvées pour les différents cas de l'écoulement des liquides s'appliquent aux cas correspondants de l'écoulement des gaz, aux coefficients près.

Cas d'un orifice en mince paroi. — Le volume du gaz qui s'écoule en une seconde, volume rapporté à la pression extérieure, est donné par la formule

$$Q = mA\frac{p}{p_a}v, \tag{1}$$

m étant un coefficient de contraction. En introduisant la valeur de v, il vient

$$Q = mA\frac{p}{p_a}\sqrt{2g\frac{p-p_a}{\varpi}}, \tag{2}$$

$p - p_a$ étant la pression motrice et ϖ le poids du mètre cube de gaz contenu dans le réservoir, de sorte que $\frac{p-p_a}{\varpi}$ représente la charge estimée en hauteur de gaz; c'est la quantité que nous désignions par h dans le cas des liquides.

Éliminons ϖ au moyen de l'équation

$$p = K\varpi(1+\alpha t),$$

et faisons passer le terme $\frac{p}{p_a}$ sous le radical, il vient

$$Q = mA\sqrt{2gK\frac{p}{p_a}\left(\frac{p}{p_a}-1\right)(1+0{,}004\,t)}, \tag{3}$$

en prenant 0,004 pour le coefficient de dilatation de l'air ordinaire.

Il reste encore à déterminer le coefficient m dans les limites qui correspondent aux exigences de la pratique.

On s'est servi longtemps des coefficients donnés par Girard et d'Aubuisson, comme résultant d'expériences faites sous d'assez faibles différences de pression.

Dans les expériences plus précises de MM. Poncelet et Pecqueur, la différence de pression a été poussée jusqu'à une valeur égale à celle de la pression extérieure. Il résulte de ces expériences que le coefficient m diminue quand l'excès de pression augmente, exactement comme dans le cas des liquides.

On a en effet, la contraction étant complète,

$p-p_a$	m
0,003 p_a	0,71
0,010	0,65
0,050	0,58
1,000	0,56

MM. Wantzel et de Saint-Venant font croître ce même coefficient avec la pression (¹).

Écoulement des vapeurs. — Quand une vapeur, traversant un orifice en mince paroi, s'écoule d'un réservoir à la pression p dans un second réservoir dont nous continuerons, pour conserver nos notations, à désigner la pression par p_a, les expériences les plus récentes, contrairement à l'hypothèse de Navier, indiquent l'absence de toute détente intérieure et établissent que, tout comme l'air, la vapeur s'écoule à peu près comme un liquide, la détente se produisant seulement dans le second réservoir.

Cette détente, dans le cas d'un gaz, est accompagnée d'un refroidissement bien sensible, de sorte que, pour de la vapeur d'eau saturée, mais sèche, on doit s'attendre à des condensations aussitôt après la sortie de l'orifice.

L'expérience vérifie ces présomptions : on aperçoit distinctement le jet sous la forme d'un cône trouble dont la base a le diamètre de l'orifice, et qui va se rétrécissant en vertu du phénomène de la contraction. En même temps la vitesse aug-

(¹) *Journal de l'École Polytechnique*, 27ᵉ Cahier, 1839; *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XVII, 1843.

mente et atteint un maximum qui, d'après M. Zeuner [1], a les valeurs suivantes :

$\frac{p}{10333}$	$\frac{p-p_a}{10333}$	v
2^{atm}	1^{atm}	482
3	2	607
4	3	682
5	4	734
6	5	775
7	6	809
8	7	835
9	8	858
10	9	879
11	10	897
12	11	913

Quand la vapeur, saturée à 12 atmosphères et à la température de 188°,41, tombe ainsi brusquement à 1 atmosphère au moment où elle a atteint sa vitesse maxima, elle contient 0,136 d'eau condensée et, par conséquent, 0,864 de vapeur à 1 atmosphère et à 100 degrés. Lorsque ensuite la vapeur a perdu sa vitesse en chocs et frottements dans le réservoir, non-seulement l'eau condensée s'évapore, mais encore la vapeur se surchauffe et atteint 155 degrés. Aussi, au delà du cône trouble dont nous avons parlé, le jet devient-il diaphane et invisible comme l'air.

Quant au coefficient de contraction, des expériences de MM. Minary et Resal, lesquelles ont porté sur des différences de pression beaucoup plus considérables que celles relatives à l'air dont nous avons parlé, ont confirmé le fait de la diminution de m pour des charges de plus en plus fortes, en donnant pour m les valeurs suivantes, p_a étant supposé constant et égal à la pression atmosphérique :

---

(1) *Das Locomotiven-Blasrohr*; Zurich, 1863.

$p - p_a$	m
$0,50 p_a$	0,617
»	0,556
2	0,494
3	0,463
4	0,443

Ajutages cylindriques. — En continuant à appliquer aux gaz les lois théoriques et expérimentales démontrées pour les liquides, nous ferons usage, dans le cas de l'écoulement par un court ajutage cylindrique, d'une formule analogue à la précédente, en remplaçant seulement le coefficient de contraction m par un coefficient d'un autre genre, que nous représentons par la lettre μ, et qui est lié à m par la formule théorique

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{m} - 1^2\right)}}.$$

Pratiquement, pour tenir compte de la différence entre le coefficient calculé 0,85 et le coefficient expérimental 0,82, nous prendrons

$$\mu = \frac{0,95}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{m} - 1\right)^2}}.$$

Des buses coniques. — En général, on emploie pour les gaz des ajutages légèrement coniques, ou *buses*. Les expériences de MM. Minary et Resal, dont j'ai déjà dit quelques mots, ont porté aussi sur l'écoulement de la vapeur par une buse de 42 millimètres de long. Le diamètre à la base était de 15 millimètres, $3\frac{1}{2}$ millimètres à la sortie. La contraction à l'entrée ayant été supprimée, voici les valeurs du coefficient $m\mu$:

$\frac{p - p_a}{p_a}$	$m\mu$
0,5	0,712
1	0,602
2	0,538
3	0,503
4	0,484

Ces coefficients sont très-notablement inférieurs à ceux que d'Aubuisson avait déduits de ses expériences (0,926, en moyenne, pour les ajutages cylindriques, 0,94 pour une conicité de 12 degrés).

Des conduites de gaz. — Dans le cas de l'écoulement du gaz dans les tuyaux, on appliquera la même formule que pour les liquides, pourvu toutefois que la température du gaz n'éprouve pas une variation considérable, ce qui est bien loin de se réaliser dans la pratique. Seulement on admet, pour le cas des gaz, que la perte de charge due au frottement est sensiblement proportionnelle au carré de la vitesse, de sorte qu'on a simplement

$$\frac{1}{4}\,\mathrm{DJ} = \beta\,\frac{v^2}{g}.$$

Donc la perte de charge due au frottement pour une longueur L est

$$\mathrm{JL} = \frac{4\beta\mathrm{L}v^2}{\mathrm{D}g};$$

donc la charge totale h est égale à la perte de charge due à la contraction à l'orifice, augmentée de la perte de charge due au frottement, de sorte qu'on a

$$h = \frac{v^2}{2g}\left(\mathrm{M} + \frac{8\beta\mathrm{L}}{\mathrm{D}}\right) = \frac{p - p_a}{\varpi};$$

donc on a

$$\mathrm{Q} = \mathrm{A}\,\frac{p}{p_a}\,v\,\mathrm{A}\,\frac{p}{p_a}\sqrt{\frac{2g\,\dfrac{p-p_a}{\varpi}}{\mathrm{M} + \dfrac{8\beta\mathrm{L}}{\mathrm{D}}}},$$

β est égal à 0,003 (¹) et M est donné en fonction de m par la formule

$$\mathrm{M} = 1,1\left[1 + \left(\frac{1}{m} - 1\right)^2\right] (^2).$$

Toutes ces formules ne sont plus applicables quand on a

(¹) Navier, d'après les expériences de d'Aubuisson, admet, 0,00324.

(²) *Voir* la théorie des ajutages cylindriques.

des conduites d'une grande longueur. Dans ce cas, en effet, il n'est plus permis de supposer la température du gaz invariable. Souvent aussi, pour certaines opérations métallurgiques, on interpose en un certain point de la conduite d'air un *appareil à air chaud*, qui change plus ou moins brusquement la température et la densité du gaz.

Dans les mines, on a besoin d'entretenir un courant d'air très-actif, afin d'enlever l'air vicié par la respiration des hommes et des animaux et la combustion des lampes, ainsi que les gaz irrespirables qui se dégagent du charbon. La section du courant d'air, les obstacles qu'il doit franchir, la température ambiante varient d'une manière dont il est fort difficile d'apprécier l'influence.

Enfin, même en faisant abstraction des causes extérieures d'échauffement, on sait depuis longtemps que la compression de l'air dégage de la chaleur, que la détente est, au contraire, généralement accompagnée d'un refroidissement. Plusieurs expérimentateurs ont cherché les lois de ces phénomènes calorifiques; ils n'ont pas tardé à reconnaître qu'il y avait bien des précautions à prendre si l'on voulait obtenir des résultats comparables, et que le dégagement ou l'absorption de chaleur était lié de la manière la plus intime au travail des forces agissant sur le gaz expérimenté.


FIN.



242 PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,
Quai des Augustins, 55.

242 Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.